Matemáticas 3

TODOS JUNTOS

Alejandro de Icaza Peña

SANTILLANA
Secundaria

Matemáticas 3 fue elaborado en Editorial Santillana por el equipo de la Dirección General de Contenidos.

Ilustración
Héctor Ovando Jarquín, Ricardo Ríos Delgado y Alma Julieta Núñez Cruz

Fotografía
Shutterstock.com, Thinkstock.com, Durga Archivo digital, Latinstock, Wikipedia, cocinarecetas.hola.com

La presentación y disposición en conjunto y de cada página de **Matemáticas 3** son propiedad del editor.
Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier sistema o método electrónico, incluso el fotocopiado, sin autorización escrita del editor.

© 2014 por Alejandro de Icaza Peña
D. R. © 2014 por **EDITORIAL SANTILLANA, S. A. de C. V.**
Avenida Río Mixcoac núm. 274 piso 4, colonia Acacias,
delegación Benito Juárez, C.P. 03240, Ciudad de México.

ISBN: 978-607-01-2252-1
Primera edición: abril de 2014
Segunda reimpresión: abril de 2016

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
Reg. Núm. 802

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

El libro Matemáticas 3 se diseñó con la finalidad de ser una herramienta flexible que acompañe en todo momento al alumno, al profesor y a los padres de familia en el proceso de formación matemática de los alumnos de tercer grado.

En esta obra se plantean situaciones en diferentes contextos, algunos relacionados con la vida diaria y otros con circunstancias especializadas, a fin de que los alumnos reconozcan las matemáticas como un saber fundamental para resolver tareas en su entorno cotidiano, así como para tomar decisiones donde intervienen relaciones numéricas, geométricas y probabilísticas.

Es importante señalar que en las actividades propuestas se consideraron los intereses de los alumnos de secundaria, las experiencias de profesores y el nivel de dificultad en el tratamiento del contenido, ya que las matemáticas son un factor importante para la formación de los estudiantes de este nivel educativo. En el diseño de las lecciones también se consideraron las cuatro competencias matemáticas:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Otro de los propósitos de este material es fomentar en los alumnos la idea de que los resultados que obtengan en el aprendizaje dependerán en gran medida de que reconozcan la importancia del trabajo colaborativo, en el cual la buena disposición para discutir los temas, confrontar resultados, escuchar opiniones diferentes, observar y trabajar en equipos son actitudes fundamentales tanto para validar procedimientos y desarrollarse en lo académico como en lo personal.

Ante esta concepción de las matemáticas, el papel del docente debe ser de guía y responsable de centrar el análisis en la veracidad de los resultados matemáticos, así como de validador de las conclusiones a las que lleguen los alumnos. También será mediador y acompañante del proceso de formación de los estudiantes junto con los padres de familia.

Por todo lo anterior, les damos la más cordial bienvenida al estudio de las matemáticas en el tercer grado de secundaria. Deseamos que los resultados que se obtengan a lo largo de este ciclo escolar sean exitosos.

Los editores

© SANTILLANA

Conoce tu libro

A continuación te mostramos el propósito de cada sección que integra el libro **Matemáticas 3,** las cuales están numeradas para que las identifiques con mayor facilidad.

Entrada de bloque

Este apartado está integrado por una doble página con un texto relacionado con uno o algunos de los contenidos por trabajar en el bloque y una fotografía que hace alusión a ellos. En él se incluyen los siguientes elementos:

1 Bloque
Hace referencia al número de bloque de estudio correspondiente del libro.

2 Invitación a la lectura
El propósito de este apartado es propiciar el desarrollo de tu habilidad lectora mediante un texto que guarda relación con algunos de los contenidos que se trabajan en el bloque.

3 Comprensión lectora
Las preguntas que se plantean en este apartado tienen el propósito de que los estudiantes desarrollen competencias lectoras mediante la búsqueda y recuperación de información.

4 Fotografía
Muestra una gran imagen relacionada con el título de la sección.

5 Aprendizajes esperados
Orientan tus procesos de aprendizaje al señalar lo que se espera que logres al final del bloque.

Alumno

En este ciclo aplicarás los conocimientos que adquiriste en tus cursos anteriores de secundaria y ampliarás lo que ya sabes; esto implica enfrentar mayores retos académicos, que te permitirán adquirir una formación matemática cada vez más sólida.

Debido a ello, el libro **Matemáticas 3** contiene actividades que integran desafíos y problemas matemáticos cuya resolución implica que expliques tus ideas, argumentes tus procedimientos, encuentres la vinculación de los contenidos matemáticos con otros campos del conocimiento, y junto con tus compañeros elabores conclusiones para validar el trabajo realizado.

Estas conclusiones son enriquecidas con la información matemática que se encuentra en las lecciones del libro y con la mediación del profesor.

La finalidad de este libro es ser de utilidad para tus estudios y fomentar el gusto y el interés por el estudio de la matemática.

Al inicio de cada bloque encontrarás una gran imagen a doble página que acompaña una lectura con la intención de que desarrolles tus competencias lectoras.

Al final de cada bloque, siempre encontrarás dos secciones: una llamada **Para saber más** y una **Evaluación tipo PISA**.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Docente

El libro **Matemáticas 3** contiene actividades cuidadosamente diseñadas, estructuradas, seleccionadas y validadas en el aula escolar.

Muchas de estas se desarrollan en contextos cercanos a los estudiantes, como una cancha de futbol. Con ello, se quiere comunicar que las matemáticas son útiles en la vida diaria para resolver situaciones básicas, y que sin duda, son imprescindibles para el avance científico y tecnológico de la actualidad.

La propuesta didáctica del libro fomenta el trabajo en equipos y en grupo con la intención de que todos participen en la construcción del conocimiento matemático. Aquí la discusión, la confrontación, el intercambio de ideas y la explicitación de dificultades y dudas por parte de los alumnos, cobran un papel fundamental. En este contexto, la labor del profesor debe ser de mediador y guía para que los estudiantes alcancen el objetivo y desarrollen las competencias matemáticas.

Los contenidos de este libro están organizados en cinco bloques, cada uno compuesto por un número variable de lecciones.

Al inicio de cada bloque se hace una "Invitación a la lectura". El objetivo de las preguntas que se plantean en este apartado es que los estudiantes desarrollen competencias lectoras; que hagan inferencias e interpretaciones del contenido del texto a partir de sus conocimientos previos y que construyan su capacidad crítico-valorativa al generar opiniones propias. Los indicadores anteriores le permitirán evaluar el nivel de comprensión lectora de sus alumnos.

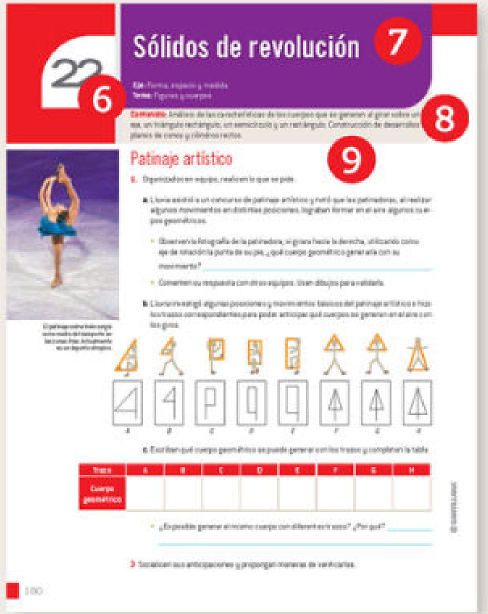
Conoce tu libro

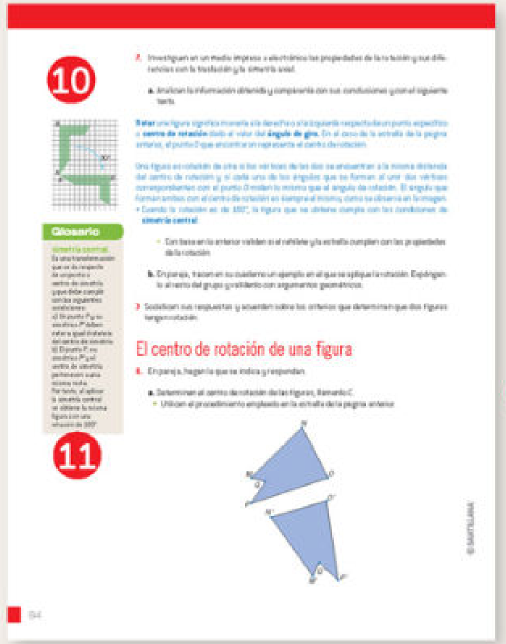
6 Lecciones
Las lecciones presentan las situaciones didácticas necesarias para tratar de manera adecuada los contenidos.

7 Título
Cada lección tiene un título relacionado con el contenido que construirás con tus compañeros y profesor.

8 Contenido
Se menciona el Eje, Tema y Contenido por trabajar en la lección, para que tengas una idea clara de su ubicación.

9 Inicio
Se plantean actividades que te permiten resolver problemas al aplicar lo que conoces acerca del tema que se estudia en cada lección.

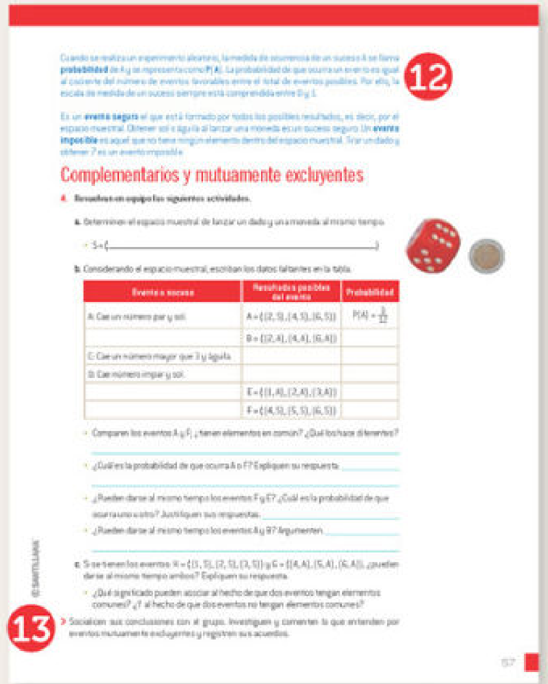




10 Desarrollo
A lo largo de la lección tendrás oportunidad de explicitar tus ideas, probar distintos procedimientos para resolver las situaciones y desafíos matemáticos; así como validar aquellos procedimientos que, aunque correctos, son más eficientes que otros.

11 Glosario
Presenta definiciones de términos matemáticos que pueden resultarte desconocidos o para que complementes tus ideas acerca de los mismos.

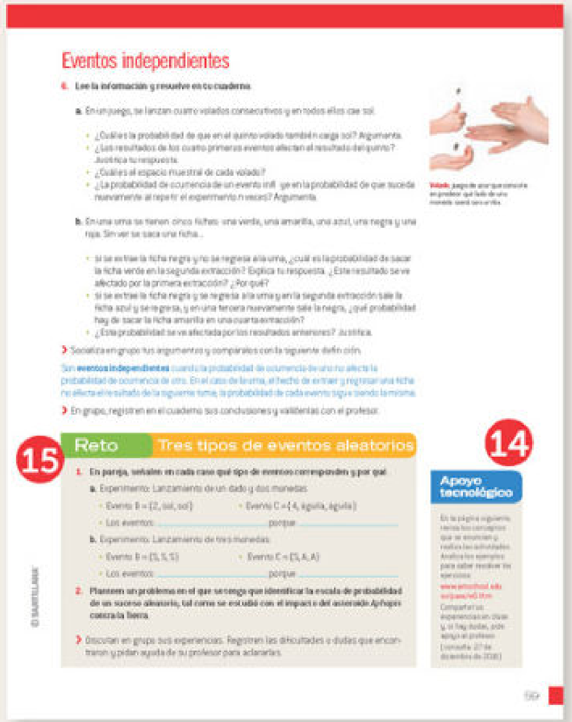
© SANTILLANA



12 Conceptos y procedimientos
En las lecciones se incluyen definiciones, procedimientos y explicaciones para que enriquezcas el trabajo en clase y reafirmes o elabores tus conclusiones matemáticas.

13 Socialización
Al final de cada actividad, podrás confrontar tus ideas con las de tus compañeros, escuchar puntos de vista, y aprender gradualmente a redactar tus conclusiones como producto del debate escolar. Con el trabajo diario podrás comunicar de manera clara tus argumentos matemáticos y validarlos en la clase. La validación es fundamental para construir los contenidos matemáticos que estudias.

14 Apoyo tecnológico
En esta sección se sugieren páginas electrónicas donde tendrás la oportunidad de ampliar tus conocimientos respecto a los contenidos estudiados. La sección puede trabajarse fuera del aula escolar, por lo cual es necesario que tengas acceso a una computadora con Internet. Comenta tus dudas en el salón de clases para que las resuelvan en grupo. Todas las direcciones electrónicas están vigentes y actualizadas, sin embargo pueden tardar un poco en abrir, ya que son Interactivos o Applets. Por otro lado, algunas páginas requieren instalar aplicaciones como Java o Descartes, las cuales no afectan a la computadora y se pueden descargar sin problemas. Todas las direcciones web se revisan constantemente.



15 Reto
Cada lección cierra con un reto. En él se plantean diversas situaciones, en las que se ponen a prueba los conocimientos adquiridos. Comenta en clase tus resultados y los procedimientos que empleaste. Si algún "Reto" te resulta difícil, coméntalo con tus compañeros y con tu profesor y juntos busquen la solución.

© SANTILLANA

16 Para saber más

Esta sección se diseñó pensando en un conjunto de actividades que te permitirán ir más allá de lo estudiado en las lecciones del libro, ya que buscan aplicar las herramientas matemáticas en la solución de problemas sociales y ambientales, además de profundizar en el estudio del álgebra, de las formas geométricas y la representación de la información.

Para resolver las actividades de esta sección, pondrás en juego lo aprendido en el bloque, con la intención de que integres saberes al resolver los problemas.

Las actividades retoman contextos interesantes como determinar la posición de una persona o de un objeto mediante el uso del GPS. En cada bloque se aborda un tema diferente.

17 Evaluación tipo PISA

Al final del bloque se encuentra una serie de actividades que debes resolver de manera individual, las cuales te permitirán poner en práctica lo que aprendiste en el bloque. Se proponen preguntas abiertas y de opción múltiple, además de problemas, todos relacionados con los aprendizajes esperados. En ellas se sigue el modelo de PISA, que significa Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes.

© SANTILLANA

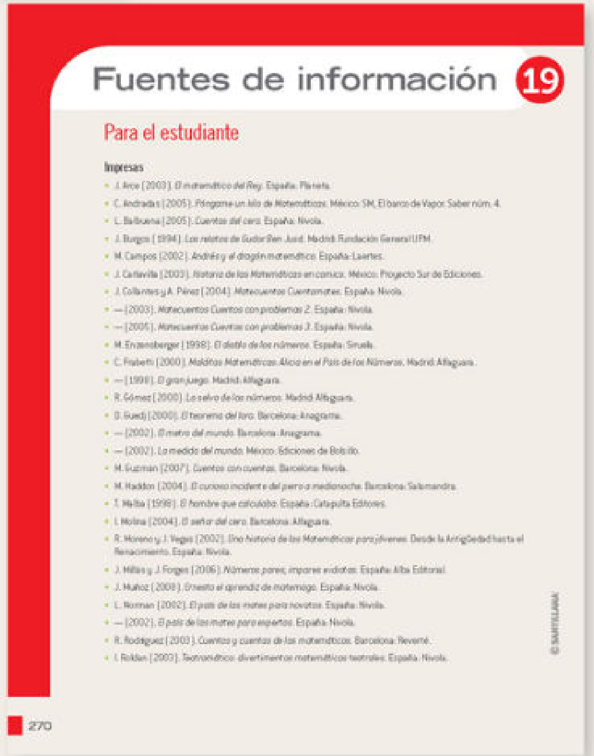
18 Valoro mi avance

En este apartado, que aparece al final de cada evaluación, encontrarás una tabla en la cual evaluarás tus avances respecto a los aprendizajes esperados del bloque, así como tus habilidades y actitudes.

© SANTILLANA

19 Fuentes de información

En este apartado encontrarás sugerencias impresas para ti, así como sugerencias impresas y electrónicas para el profesor, con el fin de enriquecer el trabajo a lo largo del ciclo escolar.



Índice

© SANTILLANA
© SANTILLANA

Dosificación

Semana sugerida	Calendarización	Aprendizajes esperados	Eje	Tema	Contenido	Lección	Páginas
Bloque 1							
1		**Evaluación diagnóstica**					
2		❱ Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	❱ Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	1. Problemas con ecuaciones cuadráticas	18-23
3			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	❱ Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	2. Construcción de figuras congruentes y semejantes	24-31
4					❱ Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	3. Criterios de congruencia y semejanza	32-39
5			Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	❱ Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	4. Gráficas, tablas y expresiones algebraicas	40-47
6					❱ Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	5. Relaciones de variación cuadrática	48-53
7				Nociones de probabilidad	❱ Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	6. Complementarios, mutuamente excluyentes e independientes	54-59
8				Análisis y representación de datos	❱ Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	7. Diseño y análisis de una encuesta	60-65
Evaluación tipo PISA							68-69
Bloque 2							
9		❱ Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan. ❱ Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	❱ Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	8. Ecuaciones cuadráticas por factorización	72-77
10			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	❱ Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	9. Rotación y traslación	78-85
11					❱ Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	10. Simetría axial, rotación y traslación	86-93
12				Medida	❱ Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	11. Cuadrados y triángulo rectángulo	94-99
13					❱ Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	12. El teorema de Pitágoras	100-105
14			Manejo de la información	Nociones de probabilidad	❱ Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	13. Mutuamente excluyentes y complementarios	106-113
Evaluación tipo PISA							116-117
Bloque 3							
15		❱ Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	❱ Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	14. Ecuaciones de segundo grado	120-125
16			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	❱ Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	15. Congruencia y semejanza de triángulos	126-131
17					❱ Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	16. El teorema de Tales	132-137
18					❱ Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	17. Figuras homotéticas	138-145

© SANTILLANA
© SANTILLANA

Semana sugerida	Calendarización	Aprendizajes esperados	Eje	Tema	Contenido	Lección	Páginas
19		Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18. Gráficas de funciones cuadráticas	146-153
20					Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	19. Curvas que modelan situaciones en movimiento	154-161
21				Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	20. Probabilidad de eventos independientes	162-167
Evaluación tipo PISA							170-171
Bloque 4							
22		Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	21. Sucesiones cuadráticas	174-179
23			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	22. Sólidos de revolución	180-187
24				Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	23. Pendiente de una recta	188-195
25					Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	24. Ángulos agudos de un triángulo rectángulo	196-203
26					Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	25. Razones trigonométricas	204-209
27			Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	26. Razón de cambio y pendiente de una recta	210-215
28				Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	27. Desviación media en un conjunto de datos	216-221
Evaluación tipo PISA							224-225
Bloque 5							
29		Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones. Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	28. Distintos tipos de ecuaciones	228-233
30			Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	29. Secciones cónicas	234-241
31					Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	30. Volumen de cilindros y conos	242-247
32					Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	31. Cálculo del volumen de cilindros y conos	248-253
33			Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	32. Variación lineal y cuadrática	254-259
34				Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	33. Equiprobabilidad en juegos de azar	260-265
Evaluación tipo PISA							268-269

© SANTILLANA
© SANTILLANA

BLOQUE 1

Invitación a la lectura

Representación de ecuaciones cuadráticas en la historia

Diversos personajes han hecho aportes al álgebra para desarrollarla como la conocemos. Los árabes, a lo largo de la edad de oro del mundo musulmán, entre los años 700 y 1200 d. de C., tradujeron y divulgaron los conocimientos de la Grecia antigua e India, y lograron gran desarrollo en álgebra y trigonometría.

El más recordado de los matemáticos árabes es Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi. En su tratado sobre álgebra, Al-Khwarizmi explica cómo resolver ecuaciones cuadráticas. Al-Khwarizmi indicaba con palabras el planteamiento y la solución de las ecuaciones; por ejemplo, esta es parte de una de sus explicaciones para resolver una ecuación cuadrática: "El método de resolución consiste en esto: toma la mitad de las raíces, que es cinco, la multiplicas por sí misma, lo que da veinticinco..." Como puedes ver, no hay letras ni símbolos algebraicos.

Fue en el siglo XVI cuando se introdujeron los símbolos para plantear ecuaciones. François Viète (1540-1603) tuvo gran influencia en ello, pues propuso usar "parámetros" por primera vez en la historia de las matemáticas. La idea de los parámetros es fundamental en matemáticas. Hasta entonces, en álgebra se estudiaban casos especiales, y se resolvían ecuaciones con coeficientes específicos, pero no existía un modelo que representara "todas" las ecuaciones cuadráticas (de forma similar a como en geometría un diagrama de triángulo *ABC* representaba "todos" los triángulos).

Viète utilizó las letras del alfabeto para simbolizar términos variables y constantes: las vocales para representar incógnitas, y las consonantes para las magnitudes o números dados o supuestamente conocidos (parámetros). Su notación tiene diferencias en comparación con la actual, pero fue un gran avance en relación con la descripción en palabras. Por ejemplo, una expresión como: $2x^2 - 5x = 23$, Viète la escribiría como 2Aq – 5A aeq 23, donde *A* es la incógnita, *q*, el cuadrado y aeq significa "igual".

Viète facilitó el estudio de las ecuaciones, con lo que el álgebra pudo estudiar clases de ecuaciones y concentrarse en la estructura de los problemas y no en su forma particular.

Lee y subraya las respuestas correctas. Después responde.

1. Las explicaciones sobre las ecuaciones cuadráticas en los tratados árabes incluían:

   A) símbolos. **B)** palabras. **C)** números. **D)** consonantes.

2. ¿Cuál fue la aportación de François Viète al álgebra actual?

   A) Estudiar varias clases de ecuaciones **B)** Solucionar ecuaciones específicas
   C) Usar letras del alfabeto en el álgebra **D)** Plantear parámetros para geometría

3. ¿Cuál fue la principal aportación de los matemáticos árabes? ______________________

   ____

4. ¿La forma como planteaba las ecuaciones Viète era mejor que la usada por Al-Khwarizmi? Explica por qué. ______________________

© SANTILLANA

El descenso en paracaídas, conocido como caída libre, es un movimiento uniforme acelerado cuya velocidad inicial es cero. La aceleración que actúa sobre los cuerpos es la de gravedad. Mediante una ecuación cuadrática se puede determinar la altura de la que se lanzan los paracaidistas o su velocidad final.

Presentación del bloque

© SANTILLANA

Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

1

Problemas con ecuaciones cuadráticas

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

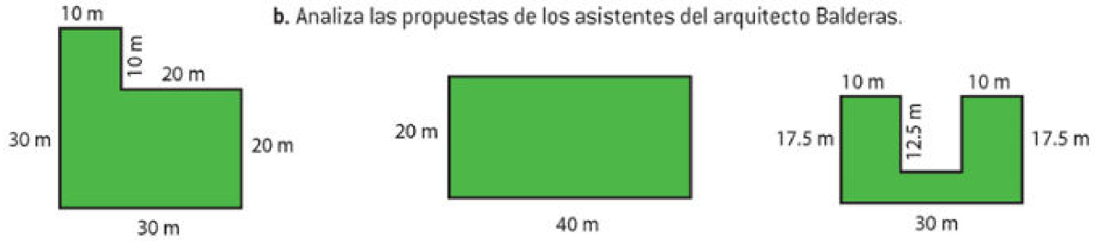
El desarrollo inmobiliario

1. Lee la información y resuelve.

Para la construcción de un desarrollo inmobiliario, el arquitecto Balderas tiene el reto de diseñar una casa muestra cuyo perímetro mida 120 m, de manera que tenga la máxima área posible sin utilizar medidas fraccionarias.

a. Si fueras el arquitecto Balderas, ¿qué forma propondrías para la casa? ¿Qué medidas usarías para cumplir las dos condiciones dadas?

b. Analiza las propuestas de los asistentes del arquitecto Balderas.



- ¿Cuál de las figuras anteriores tiene mayor área? Explica. ______

c. El arquitecto Balderas se inclinó por la forma rectangular, pero sabe que el diseño presentado no ocupa la máxima área posible para un rectángulo, cuyo perímetro sea 120 m.

- ¿Estás de acuerdo con el arquitecto? Justifica. ______
- Discutan en parejas qué medidas debe tener un rectángulo que cumpla las condiciones dadas por el arquitecto y regístrenlas en su cuaderno.

d. Uno de los asistentes propuso que las medidas fueran 30 m de largo y 30 m de ancho.

- ¿Las medidas cumplen con las condiciones dadas? Sustenten su respuesta. ______

e. Supongan que el largo del terreno mide a m y el ancho mide $a + 2$ m.

- ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro del terreno? ______
- ¿Qué expresión algebraica representa el área del terreno? ______
- Reflexionen. ¿Cómo pueden determinar el valor de a?

› Comparen sus respuestas con sus compañeros y discutan la última pregunta. Lleguen a acuerdos y registren sus conclusiones en su cuaderno.

Glosario

expresión algebraica. Es una combinación de letras y números con signos de operación. $y = \frac{1}{2}x - 10$ es una expresión algebraica.

© SANTILLANA

Área máxima, mismo perímetro

2. Lean en pareja la información y resuelvan en su cuaderno.

a. Como el arquitecto Balderas quiere que la casa muestra incluya un jardín con perímetro de 40 metros, propone que el largo mida 6 m más que el ancho.

- Representen algebraicamente la propuesta del arquitecto: ______
- ¿Cuál es la medida del largo y la del ancho del terreno que ocupará el jardín de la casa? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta. ______
- ¿Cuál es el área del terreno? ______
- La propuesta anterior, ¿representa el área máxima que puede ocupar un rectángulo con perímetro de 40 m? Justifiquen. ______

b. Completa la tabla que muestra cómo varía la medida de cada lado del terreno rectangular del jardín al mantener constante la medida del perímetro.

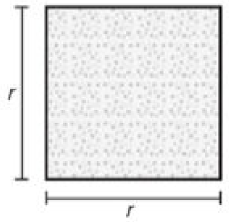
Largo (m)	Ancho (m)	Perímetro (m)	Expresión que representa el área	Área (m²)
$a + 6$	a	40		
$a + 8$	a	40		
$a + 9$	a	40		
$a + 10$	a	40		

- ¿Qué hicieron para determinar el área en cada caso? ______
- Reflexionen. ¿Qué diferencia hay entre las expresiones que representan el área del jardín y las de la forma $ax + b$ que trabajaron en segundo grado?

› Socialicen sus respuestas y, en grupo, comenten qué tipo de expresiones representan al área del jardín y las estrategias que siguieron para resolverlas. Con ayuda del profesor revisen sus procedimientos.

3. Analiza la información y haz lo que se solicita.

Para otro proyecto, el arquitecto Balderas quiere conocer la cantidad de material necesario para cimentar una casa, pero solo cuenta con las medidas del cuadrado que se muestra, el cual representa la superficie de una de las ocho casas.



a. ¿Cuál es el área del cuadrado? ______

b. Si el estacionamiento ocupará $\frac{1}{6}$ del largo y $\frac{1}{2}$ del ancho de la casa, ¿cuál será su área? ______

- Representa en la figura el espacio que tendrá el estacionamiento.

© SANTILLANA

c. La tabla muestra las áreas de las habitaciones que tendrá cada una de las casas del desarrollo. Completa la información.

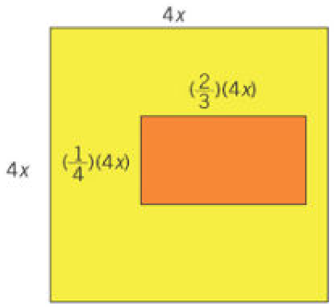
	Largo (m)	Ancho (m)	Área (m^2)
Casa	r	r	r^2
Cocina	$\frac{1}{6}r$	r	
Baño	$\frac{1}{6}r$		$\frac{1}{12}r^2$
Sala-comedor	Es el doble del baño	r	
Recámara	$\frac{1}{3}r$	r	
Estacionamiento	$\frac{1}{6}r$	$\frac{1}{2}r$	

- Suma las expresiones algebraicas del área de la cocina, baño, sala-comedor, recámara y estacionamiento.
- ¿Qué resultado se obtiene? __________

d. Escribe el área total de la casa como la suma de las áreas de las habitaciones que la forman. __________

› Compara tus expresiones algebraicas con las de otros compañeros y valídalas con la guía del profesor. Si hay dudas, coméntenlas para solucionarlas.

4. Analiza el diseño de la izquierda y responde.



a. ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área en color anaranjado? __________

b. ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área total del cuadrado? __________

c. Si el área total es de 144 cm^2, ¿cuál es la expresión algebraica que la representa? __________

d. ¿Cuál es la medida de cada lado del cuadrado? __________

e. ¿Cuánto mide el largo del rectángulo anaranjado? __________

f. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo anaranjado? __________

g. ¿Cuál es el área del rectángulo anaranjado? __________

› Comparte tus respuestas con las de otros compañeros.

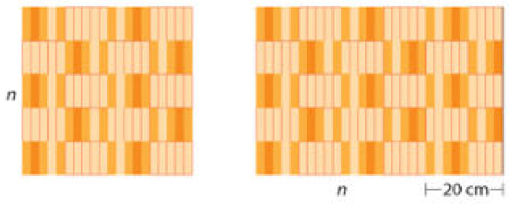
© SANTILLANA

De cuadrado a rectángulo

5. Analicen el siguiente problema y resuelvan en su cuaderno.

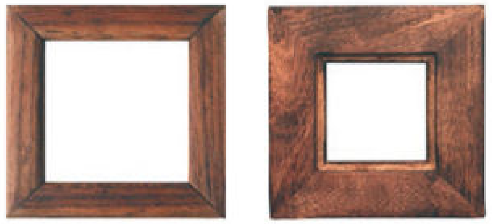
a. Un artesano trabaja el ónix. Para elaborar una lámpara, necesita una placa cuadrada que mide n cm de lado; después le agrega una tira rectangular de 20 cm como se muestra:

- ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho de la tira rectangular?
- ¿Cuál es la medida del área de la tira rectangular?
- ¿Cuál es el área del cuadrado original en términos de n?
- ¿Qué expresión algebraica muestra el área de la placa final?
- Si la cantidad de ónix utilizada es de 300 cm^2, ¿cuáles son las medidas de la placa inicial, es decir, cuánto vale n?
- Describan el procedimiento que siguieron para resolver la actividad.



6. En equipo, lean y respondan.

El mismo artesano hizo un convenio con una tienda departamental para fabricar portarretratos de madera, como los que se muestran a la derecha.
La figura 1 representa las medidas de un portarretrato. La madera que usarán de fondo es la que se encuentra en color rosa.



Modelos para portarretratos.

a. ¿Cuál es el área total del portarretratos? __________

b. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas determina el área del fondo del portarretratos (área rosa)? __________

- $(40 - x)(40 - x)$
- $(40 + 2x)(40 - 2x)$
- $(40 + 2x)^2$
- $4x^2 - 160x + 1\,600$

- ¿La expresión algebraica que determina el fondo del portarretratos es de la forma $ax^2 + bx + c$? Justifiquen.

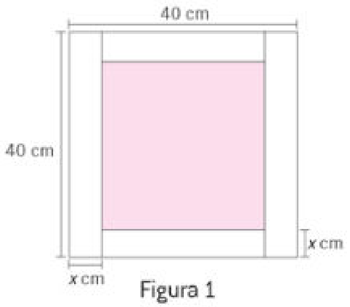


Figura 1

c. Completen la tabla, determinen el grosor del marco en cada caso, es decir, el valor de x. Consideren que todos los portarretratos miden 40 cm de lado y que el grosor máximo del marco es de 8 cm.

Área del portarretrato	Área del fondo $4x^2 - 160x + 1\,600 =$	Medida de x (cm)	Área que ocupa el marco $1\,600 - (4x^2 - 160x + 1\,600)$
1 600 cm^2	1 296 cm^2	2	
	784 cm^2		
	1 156 cm^2		
	900 cm^2		

› Compartan sus inquietudes y estrategias de solución con las de otros equipos. De ser necesario, soliciten apoyo del profesor para trabajar en grupo.

© SANTILLANA

7. **Analicen la información y realicen lo que se indica.**

Glosario

operaciones inversas. Operaciones que revierten los efectos de otra operación. La operación inversa a la potenciación es la raíz cuadrada.

Expresiones algebraicas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ representan una **ecuación cuadrática** o de segundo grado. En ellas, en uno de sus términos, la incógnita se encuentra elevada a la segunda potencia y se conoce como **término cuadrático**, siendo este el de mayor valor en el exponente y con coeficiente diferente de cero (a, b y c son números reales). Algunas de estas expresiones se pueden resolver utilizando recursos como el tanteo u **operaciones inversas**. Por ejemplo, se sabe que la operación inversa a la potenciación es la raíz cuadrada. Los términos de esta fórmula se llaman: ax^2, término cuadrático; bx, término lineal y c, término independiente.

a. Verifiquen en cuáles de los problemas resueltos se cumple lo anterior.
b. Comparen los procedimientos utilizados para resolverlos y lleguen a acuerdos.

› Comenten la información en grupo y registren sus conclusiones.

Operaciones inversas

8. **Escriban la expresión algebraica que representa cada caso y resuélvanla.**

a. La mitad del cuadrado de un número menos 300 da como resultado 500, ¿cuál es ese número? ____________
   - Expresión algebraica: ____________ Solución: ____________
   - Si al valor de este número le aumentamos 10, ¿cuál es el nuevo resultado? ____________
   - Si se le vuelve a aumentar 10 al resultado, ¿qué se obtiene? ____________

b. Determinen el área del rectángulo:

   - Expresión algebraica: ____________ Valor de y: ____________
   - Área del rectángulo: ____________

c. La suma de los cuadrados de dos enteros impares consecutivos es 202. ¿Cuáles son esos dos números? ____________

d. La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 52. ¿Cuáles son esos números? ____________

e. En el trinomio $ax^2 + 3x + 7 = 15$, ¿cuánto vale a cuando x es igual a 1? ____________

f. El doble del cuadrado de un número más cuatro veces el mismo número más 2 es igual a 50. ¿Cuál es el valor de ese número? ____________

› Compartan con el grupo sus resultados. Comenten sus inquietudes y las estrategias que aplicaron.

© SANTILLANA

9. **Escriban la ecuación cuadrática asociada a cada enunciado.**

Enunciado	Ecuación
El área de un rectángulo mide 66 cm²; la medida del largo mide 5 metros más que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho del rectángulo?	
El doble del cuadrado de un número más cuatro veces el mismo número más 15 es igual a 175. ¿Cuál es el valor de ese número?	
La suma del cuadrado de dos enteros impares consecutivos es 130. ¿Cuáles son esos dos números?	
La diferencia del cuadrado de dos enteros pares consecutivos es 44. ¿Cuáles son esos dos números?	

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros para validarlas. Después, propongan un enunciado y la ecuación cuadrática que lo representa.

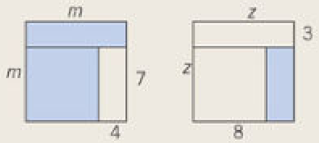
a. Resuelvan las ecuaciones en grupo; si hay dudas o dificultades, consulten a su maestro.
b. ¿Cuáles son las ventajas de representar mediante una ecuación cuadrática los planteamientos anteriores? Expliquen.

Reto Datos desconocidos

1. **En parejas, lean y realicen en su cuaderno lo que se propone.**

a. Un alumno de secundaria afir a que si un número a se eleva al cuadrado, se obtiene una ecuación cuadrática, lo cual significa que a aumenta al doble y en otros casos cuatro veces. ¿Están de acuerdo con el alumno? Expliquen.
b. El mismo alumno afir a que si se da la expresión $m^2 = 120$ y se quiere conocer el valor de m, basta con elevar a la $\frac{1}{2}$ ambos términos de la ecuación. ¿Están de acuerdo con el alumno? Expliquen y determinen el valor de m.
c. ¿Las ecuaciones cuadráticas únicamente modelan el área de figuras geométricas? Escriban un ejemplo que justifique su respuesta.
d. ¿Una expresión lineal puede representar el área de un rectángulo, por ejemplo $x + 5$? Argumenten su respuesta.

2. **Escriban la expresión algebraica que determina el área sombreada en azul de los siguientes cuadrados.**



› Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Además indiquen qué implica resolver problemas asociados a ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio:
http://www.extremate.es/ESO/Defin tivo%20Segundo%20Grado/segundogradosencillo.swf
podrás practicar la resolución de ecuaciones de segundo grado. Para ello:
1. Elige la ecuación a resolver.
2. Resuélvela en tu cuaderno.
3. Valida tu resultado en la página.

Comparte tus experiencias en clase. Si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 28 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

2

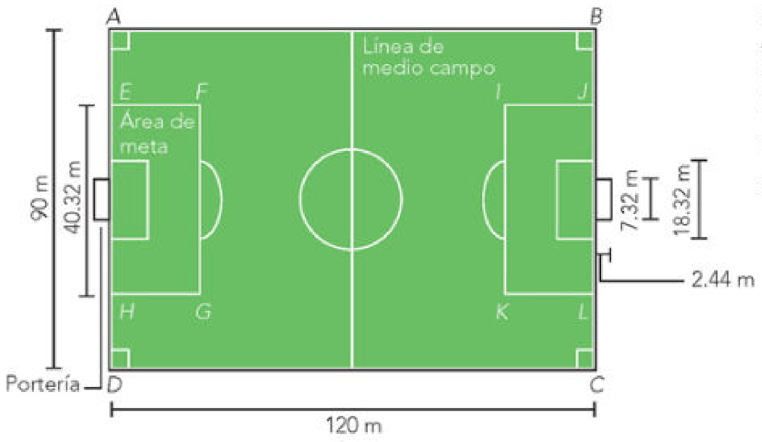
Construcción de figuras congruentes y semejantes

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

La cancha de futbol

1. En pareja, analicen la cancha de futbol y contesten lo que se pide.



En un centro deportivo, como parte de las actividades de promoción del deporte, se pintarán las líneas de las canchas de futbol. Para hacerlo, los responsables hicieron el esquema de la izquierda.

a. ¿Consideran que el esquema de la cancha de futbol es simétrico? ¿Por qué? ____________

- ¿Cuál es el eje de simetría? ____________
- Comparen las figuras de cada medio campo. ¿Qué observan? ____________
- Si esta línea se trazara a 70 m de alguna de las porterías, se conservarían las propiedades de la simetría que identificaron? Argumenten. ____________

b. Al hacer el esquema de la cancha se consideraron las medidas reglamentarias. Comprueben que $\overline{EF}$ mide lo mismo que $\overline{KL}$. Describan el procedimiento que siguieron. ____________

- Usen su compás y comprueben que $\overline{FG}$, $\overline{JL}$ y $\overline{EH}$ miden lo mismo.
- ¿Cómo son $\overline{HG}$ e $\overline{IJ}$? ____________ Expliquen su procedimiento y justifiquen sus resultados. ____________

c. Analicen la información: Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

- Tracen varios **segmentos** y pidan a otros compañeros que los reproduzcan en su cuaderno. Verifiquen que sean congruentes.

› Socialicen sus respuestas y procedimientos. Con la ayuda del profesor validen sus resultados.

Glosario

segmento de recta. Parte de recta comprendida entre dos puntos. El segmento comprendido entre los puntos *A* y *B* se denota como $\overline{AB}$.

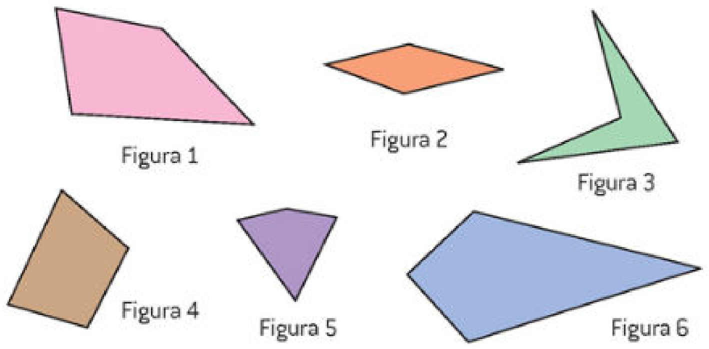
© SANTILLANA

© SANTILLANA

Segmentos y ángulos congruentes

2. Reúnete con un compañero para hacer lo siguiente.

a. Nombren los vértices de las figuras. Luego, determinen cuáles tienen lados congruentes. Remarquen los lados correspondientes.



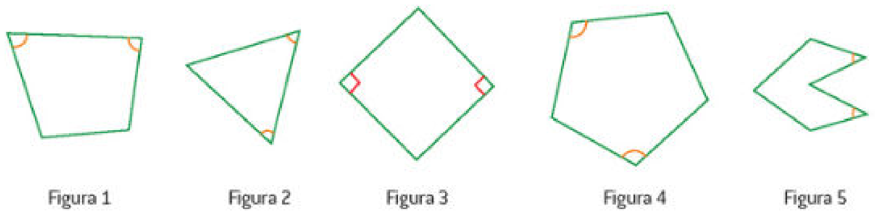
- ¿Cuáles figuras no tienen lados congruentes? ____________

b. Propongan una estrategia para modificar las figuras y que estas tengan al menos un par de lados congruentes. Realicen la construcción en su cuaderno.

c. Argumenten por qué su construcción cumple con la condición solicitada.

› Comenten en grupo sus conclusiones y registren sus acuerdos.

3. Determinen si los ángulos resaltados en cada caso son congruentes. Justifiquen sus respuestas. Coméntenlas con otros compañeros.



a. ¿Cuántos ángulos congruentes tiene la figura 2? ____________

b. ¿Todos los triángulos tienen el mismo número de ángulos congruentes? ____________

c. ¿Cuántos ángulos congruentes tiene un hexágono regular? ____________

d. Reflexionen: "Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida".

e. Analicen la cancha de futbol e identifiquen cuáles ángulos son congruentes.

f. En grupo, con base en lo que han trabajado, expliquen qué es *congruencia* y en su cuaderno tracen figuras con:

- dos lados congruentes.
- dos ángulos congruentes.

› Clasifiquen las figuras que trazaron y determinen otras de sus características.

Arte en plata

4. En pareja, lean la información y resuelvan el problema.

Un cliente solicitó a un joyero diseñar aretes que incluyeran tres triángulos congruentes. El joyero propuso los siguientes modelos.


Modelo 1: triada en plata

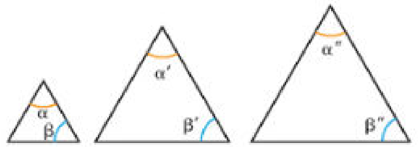

Modelo 2: triada en oro y plata

a. ¿Los modelos cumplen con las condiciones que el cliente solicitó? Justifiquen su respuesta. ______

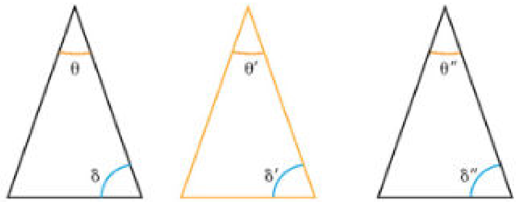
- ¿Qué procedimiento deben seguir para comprobar si los tres triángulos que forman cada arete son congruentes? Escríbanlo a continuación.

Modelo 1	Modelo 2

b. Los siguientes trazos son representaciones geométricas de los modelos 1 y 2. Analícenlos, hagan lo que se les solicita y respondan las preguntas. Argumenten cada caso.



Modelo 1



Modelo 2

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Modelo 1

- Obtengan la medida del ángulo α y compárenla con la medida de los ángulos α' y α''. ¿Cómo son las medidas de los tres ángulos entre sí? ______
- ¿Cómo son las medidas de los ángulos β, β' y β''? ______
- Nombren Ω, Ω' y Ω'' a los ángulos que no están marcados. ¿Los ángulos son congruentes? ______

Modelo 2

- ¿Cómo son las medidas de $\angle\theta$, $\angle\theta'$ y $\angle\theta''$? ______
- ¿Los ángulos δ, δ' y δ'' son congruentes? ______
- Nombren ε, ε' y ε'' a los ángulos que no están marcados. ¿Los ángulos son congruentes? ______

c. Elijan dos triángulos del modelo 1 y nómbrenlos ΔABC y $\Delta A'B'C'$; y a sus lados *abc* y *a′b′c′*, respectivamente.
d. Elijan dos triángulos del modelo 2 y nómbrenlos $\Delta \mathcal{E}FG$ y $\Delta \mathcal{E}'F'G'$, y a sus lados *efg* y *e′f′g′*.
e. Midan los lados de los triángulos y completen la tabla. Después respondan.

Triángulo	Medida					
ABC	$a =$	$b =$	$c =$	$\frac{a}{a'} =$	$\frac{b}{b'} =$	$\frac{c}{c'} =$
$A'B'C'$	$a' =$	$b' =$	$c' =$			
$\mathcal{E}FG$	$e =$	$f =$	$g =$	$\frac{e}{e'} =$	$\frac{f}{f'} =$	$\frac{g}{g'} =$
$\mathcal{E}'F'G'$	$e' =$	$f' =$	$g' =$			

- ¿Qué significan los cocientes obtenidos en ΔABC y $\Delta A'B'C'$? ______
- Discutan por qué se puede afirmar que los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen una relación de proporcionalidad. Anoten sus argumentos. ______
- ¿Cómo son los cocientes obtenidos en $\Delta \mathcal{E}FG$ y $\Delta \mathcal{E}'F'G'$? ______
- ¿Qué sucede con la medida de los lados de los triángulos $\mathcal{E}FG$ y $\mathcal{E}'F'G'$? ______

› Socialicen sus respuestas y discutan cuándo dos figuras son congruentes y cuándo son semejantes. Lleguen a acuerdos y registren sus conclusiones.

f. Analicen la siguiente información y realicen lo que se indica.

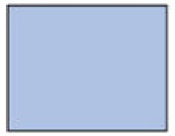
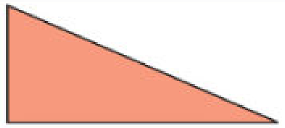
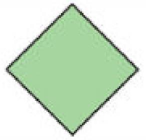
Dos polígonos son semejantes si los lados de uno son proporcionales a los lados correspondientes del otro y si los ángulos de uno miden lo mismo que los ángulos correspondientes del otro.

A la razón de dos lados correspondientes de dos figuras semejantes se le llama **razón de semejanza**.

- Con base en el concepto anterior, seleccionen el término que representa la propiedad de los triángulos estudiados en la página anterior y completen las conclusiones.
  - Congruentes
  - Semejantes
- Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son ______ porque ______
- Los triángulos *EFG* y *E'F'G'* son ______ porque ______

› Socialicen sus argumentos y lleguen a acuerdos en grupo.

5. Tracen una figura semejante y una congruente a la figura original.

Figura original	Figura semejante	Figura congruente
		
		
		

a. De manera individual, analiza las figuras que trazaste y concluye. Después responde.

- ¿Qué razón de semejanza aplicaste al trazar las figuras? ______
- Se puede afirmar que una figura es semejante a otra cuando ______
- Se puede afirmar que una figura es congruente a otra cuando ______

› Socializa tus conclusiones con el grupo y susténtalas con ejemplos. Con ayuda del profesor lleguen a acuerdos.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

¿Semejantes o congruentes?

6. En pareja, realicen lo que se pide.

Guadalupe utilizará un programa de fotografía que le permite incluir modelos geométricos con distintas imágenes. Ella quiere ampliar la fotografía que se muestra, de manera que el segmento que mide 6 cm, mida 15 cm.

a. Determinen las medidas de la fotografía ampliada.

- ¿Cuáles serían las medidas de los lados de los rectángulos amarillos? ______
- ¿Cuáles serían las medidas de los lados de los rectángulos azules? ______
- ¿Qué características comparten la fotografía original y la fotografía ampliada? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Cuál fue la razón de semejanza que se aplicó? ______
- Describan el procedimiento que siguieron para responder las preguntas anteriores. ______

b. En el cuaderno tracen una figura semejante a la que se muestra, en la que el segmento que mide *x*, mida 1.5*x* cm.

- ¿Cuánto miden los lados de la figura que trazaron? ______
- ¿Cómo lo calcularon? ______
- ¿Cuál es la razón de semejanza entre la fotografía original y la ampliada? Justifiquen. ______

c. Ahora consideren que $x = 5$ cm y determinen las medidas de las fotografías ampliadas con base en la razón de semejanza que se indica en la tabla.

	Razón de semejanza		
Medidas	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{2}{3}$
Lado			

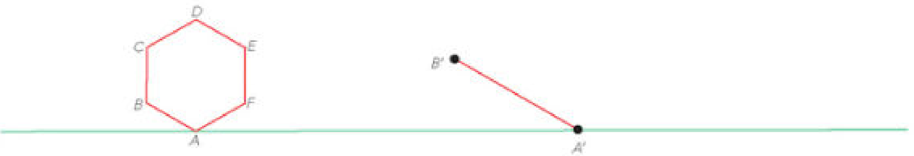
- ¿Las fotografías son semejantes o congruentes? ¿Por qué? ______

› Socialicen sus respuestas con el grupo, así como el procedimiento empleado. Si tienen dudas, extérnenlas al profesor.

Problemas de construcciones semejantes

7. **De manera individual haz lo que se indica.**

a. Construye un hexágono regular semejante al que se muestra. Usa como referencia el segmento $A'B'$.



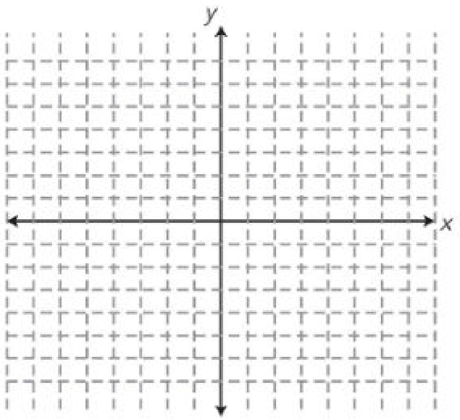
Glosario

lados homólogos. Son los lados correspondientes de polígonos semejantes o congruentes.

- Compara los **lados homólogos** de ambos polígonos. Determina el factor de proporcionalidad entre ellos. ______
- Etiqueta los vértices y establece cómo son los ángulos correspondientes entre ambos hexágonos. Sustenta con argumentos. ______

______

b. Ubica en el plano cartesiano los pares ordenados que se muestran y une los puntos. Explica si las figuras que se forman en cada caso son congruentes o semejantes. Si tienes acceso a un programa de geometría dinámica, realízalo en él.



Caso 1. (0, −2), (0, −4), (−2, −2), y (1, 1), (3, 1), (1, 3)

Caso 2. (3, 2), (5, 2), (5, 3), (3, 3) y (2, −1), (6, −1), (6, −3), (2, −3)

- Propón pares ordenados para construir dos figuras semejantes y dos congruentes.

______

- Determina el factor de proporcionalidad entre las figuras semejantes. ______

______

› Socializa con el grupo tus propuestas para validarlas.

© SANTILLANA

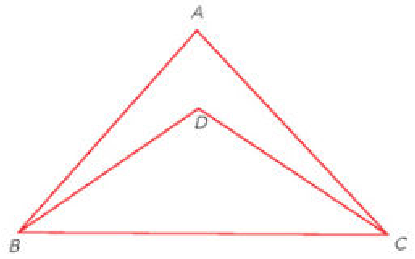
© SANTILLANA

c. Analiza la figura y realiza lo que se indica.

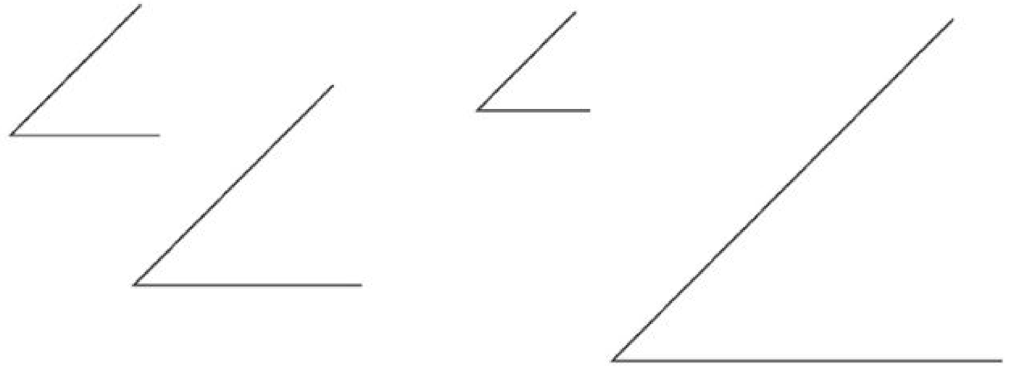
- Determina los lados que son congruentes.
- Considera el segmento *BC* como eje de simetría y construye una figura simétrica a la que se muestra.
- ¿La figura que trazaste es congruente a la figura original?

Argumenta. ______

______



d. Completa los triángulos y justifica por qué se trata de una familia de figuras semejantes.



› Socializa tus respuestas y llega a acuerdos con el grupo. Discutan y registren acuerdos sobre las condiciones geométricas necesarias para construir figuras congruentes y figuras semejantes.

Reto ¿Congruente o semejante?

1. **En pareja, resuelvan los problemas.**

a. Determinen en cada caso, cuáles figuras son congruentes y cuáles son semejantes. Argumenten sus respuestas.

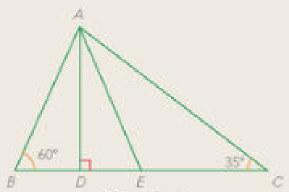


Figura 1

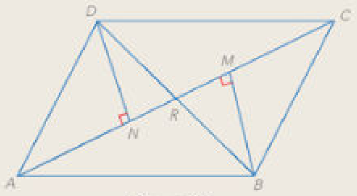


Figura 2

b. En tu cuaderno, haz una construcción o composición geométrica con figuras semejantes y congruentes.

› Discutan en grupo sus experiencias: anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

En las siguientes páginas:
http://tutormatematicas.com/GEO-m/Triangulos_semejantes.html
http://www.dmae.upct.es/ffpepemar/mateprimero/trigonometria/angulos/ang_semeja.htm
podrás ampliar tus conocimientos sobre figuras semejantes.
Discute con tus compañeros la información que se encuentra en el sitio y analicen los ejemplos propuestos. (consulta: 28 de diciembre de 2016)

3

Criterios de congruencia y semejanza

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Banderas y figuras congruentes


Bandera de Antigua y Barbuda


Bandera de Eritrea


Bandera de Seychelles

1. Lee la información y resuelve.

Guadalupe participará en la ceremonia conmemorativa del día de la ONU y debe elaborar una bandera; puede elegir entre las tres opciones que se muestran a la izquierda.

a. Analiza las banderas y responde.

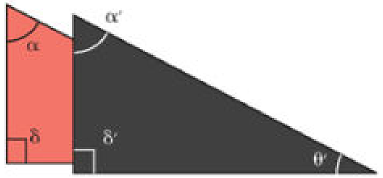
- Guadalupe afirma que los triángulos verde y azul de la bandera de Eritrea son congruentes. ¿Es correcto? ¿Por qué? ______________________
- Propón un procedimiento para comprobar que los triángulos rojos de la bandera de Antigua y Barbuda son congruentes. ______________________
- Aplica tu procedimiento y determina si los triángulos que conforman la bandera de Seychelles son congruentes. Argumenta. ______________________

› Socializa tus argumentos. Discute con el grupo los procedimientos que empleaste en la resolución de las preguntas anteriores y lleguen a acuerdos.

b. Mariana analizó la bandera de Papua Nueva Guinea y afirma que los triángulos que la forman son congruentes. Para comprobarlo hizo lo siguiente:


Bandera de Papua Nueva Guinea


1. Trazó la diagonal del rectángulo.
2. Lo cortó por su diagonal.

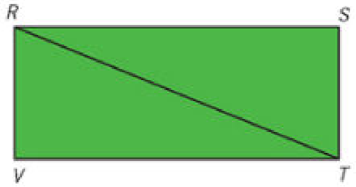


3. Superpuso los triángulos resultantes.

© SANTILLANA

- ¿Coincides con la afirmación de Mariana? ¿Por qué? ______________________
- ¿Qué características hacen que los triángulos sean congruentes? ______________________
- ¿Cómo son los ángulos α y α'? Justifica. ______________________
- ¿Puede ser $\angle\delta = \angle\delta'$? Argumenta. ______________________

› Comparte tus respuestas en grupo y registra los acuerdos.



2. En pareja, sigan el procedimiento y respondan.

- Tracen un rectángulo en papel grueso.
- Etiqueten sus vértices como *R, S, T, V*.
- Tracen una de sus diagonales y recórtenlo.
- ¿Qué tipo de triángulos se formaron? ______________________

a. Superpongan los triángulos formados. Escriban qué lados coinciden con los siguientes.

- *RV*: __________
- *RS*: __________

b. Obtengan la medida de los ángulos *SRT* y *RTV*.

- ¿Cómo son entre sí? __________ ¿Y los ángulos *TRV* y *RST* ? Argumenten. __________
- Si la bandera tuviera forma de cuadrado, ¿se obtendría el mismo tipo de triángulo? ¿Por qué? ______________________

c. Una pareja de estudiantes afirmó que los triángulos *RST* y *RVT* son congruentes. ¿Es correcto? Justifiquen su respuesta. ______________________

d. Los estudiantes concluyeron que “dos triángulos son congruentes si, al sobreponerlos, los lados y ángulos de uno miden lo mismo que los lados y ángulos correspondientes del otro”. Analicen la conclusión y valídenla. ______________________

e. Lean y discutan la información, después completen sus conclusiones.

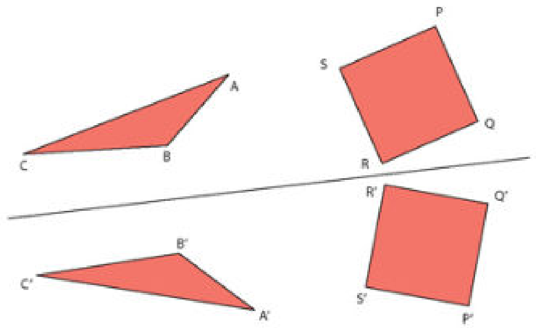
Para construir **triángulos congruentes** al trazar una diagonal de un cuadrilátero, los lados opuestos del cuadrilátero deben ser paralelos. Es decir, solo se obtienen triángulos congruentes en los paralelogramos.

› Socialicen sus conclusiones y, si hay dudas, soluciónenlas con ayuda del profesor.

© SANTILLANA

Figuras congruentes

3. Analiza la construcción geométrica y realiza lo que se pide. Argumenta cada respuesta.



a. En el caso de los triángulos:

- ¿ Los ángulos *CAB* y *C'A'B'* son congruentes? ______
- ¿ Los ángulos *ABC* y *A'B'C'* son congruentes? ______
- ¿La medida de los ángulos internos de los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes? ¿Por qué? ______

b. En el caso de los cuadrados. ¿Cómo es la medida de los **ángulos consecutivos**? ______

______

- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. Marca en los cuadrados los ángulos opuestos.
- Explica qué condiciones son necesarias para que dos cuadrados sean congruentes.

______

- ¿Estas condiciones se pueden generalizar para todos los paralelogramos? ¿Por qué?

______

______

c. Determina si las figuras son congruentes. Usa el símbolo ≅, que indica congruencia.

- ΔABC ______ $\Delta A'B'C'$ • *RSPQ* ______ *R'S'P'Q'*
- ¿Dos figuras son congruentes cuando existe una relación de simetría axial? Justifica. ______

______

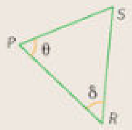
- ¿Todas las figuras congruentes son simétricas? Argumenta y propón varios ejemplos para sustentar tus respuestas. ______

______

› Socializa tus respuestas y argumenta qué criterios determinan que dos figuras sean congruentes.

Glosario

ángulo consecutivo. En un polígono dos ángulos son consecutivos cuando estos comparten el mismo lado. En el ΔPRS, los ángulos δ y θ son consecutivos.



© SANTILLANA

Construcción de triángulos congruentes

4. Construye en tu cuaderno los triángulos que se solicitan.

- Dos triángulos que tengan dos lados y el ángulo que forman entre ellos respectivamente iguales.
- Dos triángulos que tengan sus tres lados iguales.
- Dos triángulos que tengan un lado y ángulos consecutivos iguales.
- Dos triángulos que tengan dos lados, y el ángulo opuesto al mayor de ellos, iguales.

a. Compara tus construcciones con las de tus compañeros y responde las preguntas.

- ¿Las figuras que trazaste son congruentes? ¿Qué criterios utilizaste para determinarlo?

______

______

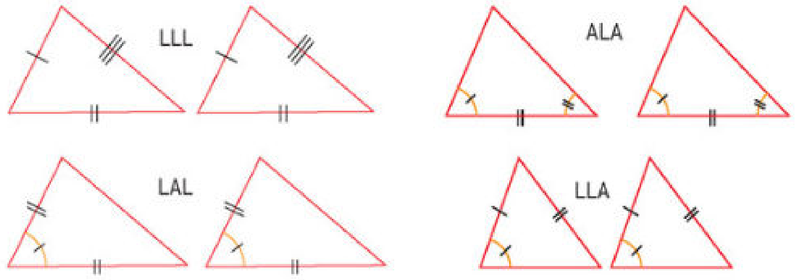
- ¿Estas condiciones se pueden generalizar para todo tipo de triángulo? Justifica tu respuesta. ______

› Comenta tus respuestas con el grupo y registra en tu cuaderno las conclusiones.

5. En grupo, analicen la información y compárenla con sus conclusiones.

Los criterios de congruencia de triángulos son las condiciones mínimas que permiten determinar si dos triángulos son congruentes. Los criterios son los siguientes:

- **Criterio LLL.** La medida de los tres lados de un triángulo es igual que la de los lados correspondientes del otro triángulo.
- **Criterio LAL.** Las medidas de dos lados de un triángulo, y la del ángulo que se forma entre ambos lados, son congruentes a los del otro triángulo.
- **Criterio ALA.** Las medidas de dos ángulos de un triángulo son congruentes a los dos ángulos correspondientes del otro triángulo. El lado que se encuentra entre ambos ángulos mide lo mismo que el lado correspondiente del otro triángulo.
- **Criterio LLA.** Las medidas de dos lados son iguales y el ángulo opuesto al mayor de ellos, mide lo mismo que el correspondiente.



a. Busquen objetos con formas triangulares que sean congruentes, describan sus propiedades y comprueben su congruencia.

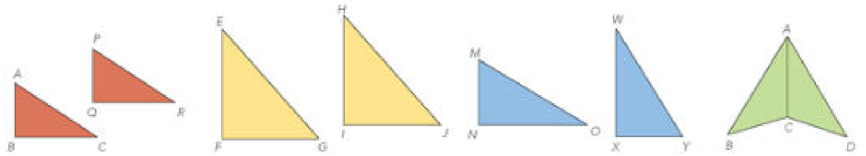
› Registren sus acuerdos, si aún tienen dudas, soluciónenlas con ayuda de su profesor.

© SANTILLANA

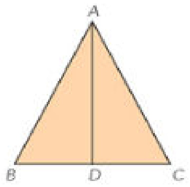
Identificación de congruencia en triángulos

6. Lee la información y responde.

a. Analiza las parejas de triángulos y determina si son congruentes. Usa el signo ≅. Utiliza tu juego de geometría.



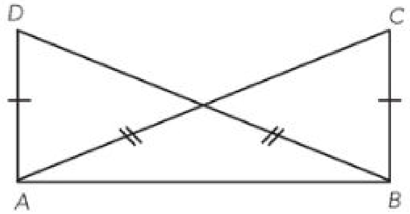
Caso 1 Caso 2 Caso 3 Caso 4



b. En el triángulo de la izquierda, $\overline{AB} = \overline{AC}$, y D es el punto medio de $\overline{BC}$.

- Indica si los tres lados del ΔADB y los correspondientes del ΔADC son iguales. Justifica. ______________________
- ¿$\Delta ADB \cong \Delta ADC$? Explica. ______________________
- ¿$\angle B \cong \angle C$? ¿Por qué? ______________________

c. Analiza la siguiente figura, donde $\overline{AC} = \overline{BD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$.



- ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta? Subráyala y justifícala.

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

d. Construye en tu cuaderno el par de triángulos que corroboran el criterio de congruencia que se indica en cada caso.

- Dado que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{FD}$ y $\overline{BC} = \overline{EF}$, se tiene que: $\Delta ACB \cong \Delta DFE$.
- Dado que $\overline{AD} = \overline{DB}$ y $\overline{AC} = \overline{CB}$ y en uno de ellos $\angle\delta + \angle\gamma = 90°$, se tiene que: $\Delta ACD \cong \Delta BCD$.

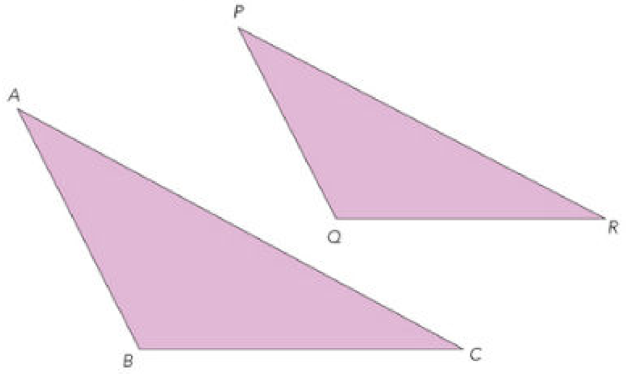
› Comparte tus argumentos con tus compañeros y registra, en tu cuaderno, una conclusión acerca de lo realizado. Validen sus argumentos con su profesor.

© SANTILLANA

Criterios de semejanza

7. Realicen en pareja estas actividades. Obtengan las medidas necesarias y regístrenlas en las figuras correspondientes.

a. Analicen los triángulos y respondan.



- ¿Cómo es la medida de los ángulos del ΔABC respecto del ΔPQR? ______________
- ¿Cuántos ángulos deben ser iguales para considerarlos triángulos semejantes? Explica. ______________________
- ¿Cómo es $\overline{AB}$ con respecto de $\overline{PQ}$? ¿Y cómo es $\overline{AC}$ al compararlo con $\overline{PR}$? ¿Y $\overline{BC}$ con respecto de $\overline{QR}$? ¿Qué relación pueden establecer? ______________________
- En grupo revisen sus respuestas y registren sus conclusiones. Después compárenlas con la siguiente información:

Criterios de semejanza de triángulos:

- Si en una pareja de triángulos los lados correspondientes son proporcionales, los triángulos son semejantes:

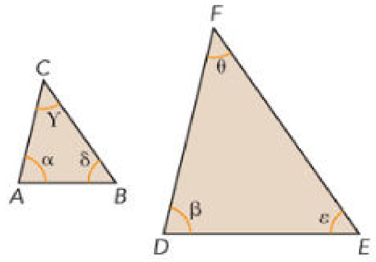
$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$$

- Si en una pareja de triángulos dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos de otro, entonces los triángulos son semejantes:

$$\alpha = \beta, \gamma = \theta, \delta = \varepsilon$$

- Si en una pareja de triángulos dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre estos es de igual medida, entonces los triángulos son semejantes:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{CB}}, \gamma = \theta$$



© SANTILLANA

8. **Une los puntos *PQR* y forma un triángulo. Luego, realiza lo que se indica y responde.**

- Ubica un punto en $\overline{QR}$ y llámalo *Z*.
- Traza una recta paralela a $\overline{PR}$ que pase por el punto *Z*. Esta paralela cruzará $\overline{PQ}$; a esta intersección llámala punto *X*.
- Traza una recta paralela a $\overline{PQ}$ que pase por *Z*. Al punto donde se interseca la paralela con $\overline{PR}$ llámalo *W*.
- Une los puntos *XZQ* y *WZR*. ¿Qué figuras se forman? ______

____

a. Considera que $\angle PQR = 80°$, $\angle QRP = 49°$ y $\angle RPQ = 51°$, y determina la medida de los siguientes ángulos.

- $\angle XQZ$: ______
- $\angle QZX$: ______
- $\angle ZXQ$: ______
- $\angle WZR$: ______
- $\angle ZRW$: ______
- $\angle RWZ$: ______

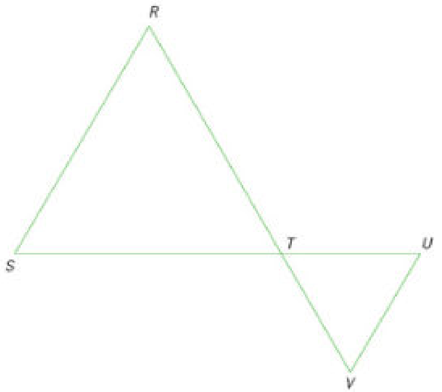
b. Si la longitud de $\overline{PQ}$ = 6.8 cm, $\overline{QR}$ = 8 cm y $\overline{RP}$ = 10.1 cm, $\overline{WZ}$ = 3.4 cm y $\overline{QZ}$ = 4 cm:

- ¿Cuál es la medida de $\overline{QX}$ y de $\overline{XZ}$? ______________________.
- ¿Cuánto mide $\overline{WR}$ y $\overline{ZR}$? ______________________.

› Confronta con tus compañeros tus argumentos y respuestas. Si hay dudas, analicen los casos en grupo y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos. Después registren sus conclusiones en el cuaderno.

9. **En pareja, analicen si ΔSRT y ΔVTU son semejantes.**

a. En la figura, $\overline{RS}$ es paralelo a $\overline{UV}$; establezcan la proporcionalidad de sus lados cuando $\overline{UV}$ = 3 cm, $\overline{TV}$ = 4 cm y $\overline{TR}$ = 12 cm.



- ¿ΔSRT y ΔTVU son semejantes? Argumenten sus respuestas aplicando los criterios de semejanza.

____
____
____
____

› Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Si les surgen dudas, resuélvanlas con ayuda del profesor.

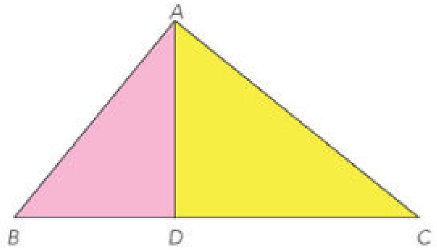
© SANTILLANA

10. **En pareja, analicen la figura y respondan.**

a. Obtengan las medidas necesarias para comprobar que los ΔBAD y ΔDAC son semejantes.

b. Expliquen si cada uno de los dos triángulos son semejantes al ΔABC.

____



› Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Si surgen dudas, coméntenlas en grupo con la fi alidad de solucionarlas.

11. **En grupo, redacten los criterios de congruencia y semejanza de triángulos; para cada caso, planteen un ejemplo.**

Criterios de congruencia de triángulos	Criterios de semejanza de triángulos

› Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor.

Apoyo tecnológico

En este sitio podrás ampliar la información sobre los criterios de congruencia de triángulos. Estudia el tema de Geometría, Capítulo 4.

www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/GeometriaInteractiva/GEOMETRIA_Sandra_Schmidt/Capitulo4/node13.htm

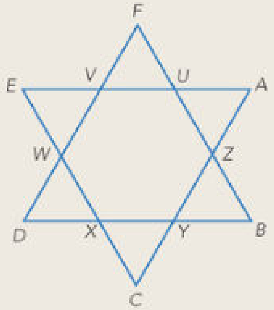
Discute con tus compañeros la información de la página y analiza los ejemplos propuestos. Realiza las actividades de Laboratorio 2, 3 y 4.

(consulta: 27 de diciembre de 2016)

Reto Congruente o semejante

1. **En pareja, resuelvan los siguientes problemas.**

a. Determinen todos los triángulos congruentes que se forman en la figura de la derecha. De ser necesario, recurran al uso del juego de geometría. Expliquen los criterios que consideraron para responder.



b. Determinen si ΔXCY es semejante a ΔDFB. Expliquen los criterios que utilizaron.

› Escriban las dificultades a las que se enfrentaron al resolver los problemas y socialícenlas para que, en grupo, sean aclaradas. Con la ayuda del profesor determinen la veracidad de sus respuestas.

© SANTILLANA

4 Gráficas, tablas y expresiones algebraicas

Eje: Manejo de la información
Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Servicios de banca en línea

1. **Lee la información y resuelve.**

Según un estudio elaborado por la Asociación Mexicana de Internet, el número de usuarios de este medio en México creció 14% durante 2011, hasta ser 40 600 000 usuarios. Respecto a sus ocupaciones más comunes, 44% afirmó usar operaciones de banca en línea; 29% dijo hacer compras en línea y 18% lo utiliza para buscar empleo.

Fuente: mexico.cnn.com/tecnologia/2012/05/17/los-usuarios-de-internet-aumentan-un-14-en-mexico-segun-un-estudio (consulta: 12 de noviembre de 2013)

Al conocer los resultados del estudio, los dueños de los bancos se establecieron como objetivo duplicar el número de usuarios de la banca en línea durante los próximos nueve meses. Ellos consideran que, para alcanzar la meta programada, el aumento mensual en el número de usuarios debe ser constante.

a. De acuerdo con el número de usuarios de Internet, ¿cuántas personas utilizan la banca en línea? ______

b. ¿A qué número de usuarios pretenden llegar los dueños de los bancos? ______

c. Según lo anterior, ¿cuántos nuevos usuarios se espera que puedan realizar operaciones de banca en línea en tres meses? ______

- ¿Y en seis meses? ______
- ¿Y en nueve meses? ______

d. Considerando únicamente el incremento estimado por los dueños de los bancos, ¿la estrategia propuesta representa una situación de proporcionalidad? ______

- Si es el caso, ¿qué tipo de proporcionalidad representa? Justifica tu respuesta. ______

e. ¿Qué expresión algebraica modela el incremento mensual de usuarios? ______

f. Completa la tabla utilizando la expresión algebraica que modela la situación.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Incremento de usuarios									

g. ¿Cómo sería una gráfica que represente los datos de la tabla? ______

› Socializa tus respuestas con el grupo y discutan las características de una gráfica que represente situaciones de proporcionalidad. Después registren sus acuerdos.

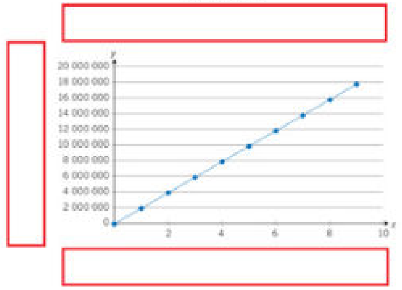
© SANTILLANA

Gráfica de los servicios de banca en línea

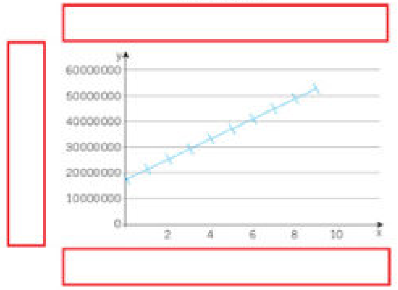
2. **En pareja, lean la información de la página anterior y resuelvan.**

a. Determinen cuál de las gráficas representa la relación de usuarios con respecto del incremento mensual esperado. Argumenten su elección.

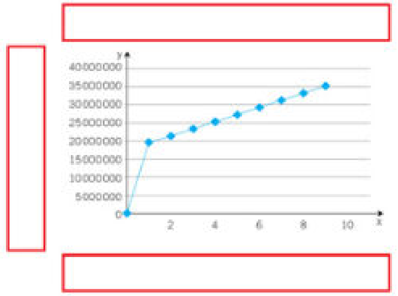
Gráfica A



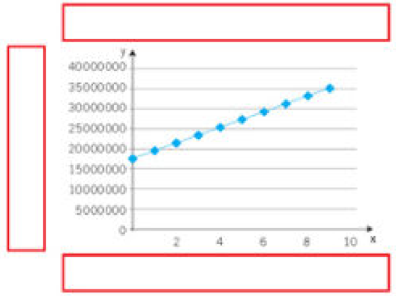
Gráfica B



Gráfica C



Gráfica D



b. Agreguen a la gráfica correcta el título y pongan nombre a los ejes horizontal y vertical. Justifiquen su decisión. ______

c. Escriban tres características de una relación de proporcionalidad. ______

d. Determinen si la gráfica elegida es de proporcionalidad y por qué las otras no corresponden a la situación planteada. Sustenten sus respuestas. ______

› Comparen sus respuestas en grupo y valídenlas con el profesor.

3. **Analicen en equipo los problemas, realicen y justifiquen lo que se solicita.**

Un grupo de asesores financieros cobra 500 pesos por cada hora de trabajo. En el mes de octubre trabajaron cuatro proyectos. En el primero laboraron 16 horas; en el segundo, 12 horas; en el tercero, 48 horas, y en el cuarto, 96 horas.

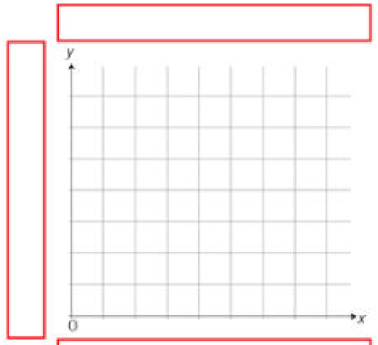
a. ¿Cuánto cobraron en cada proyecto? ______

b. ¿Qué expresión algebraica modela el cobro, según las horas de trabajo? ______

© SANTILLANA

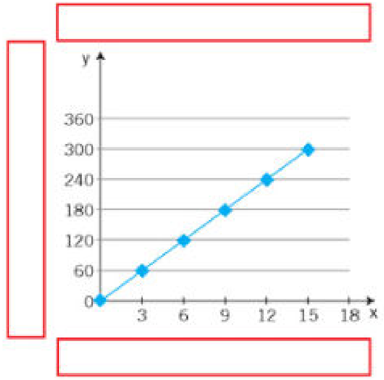
c. Registren en la tabla el cobro de los asesores, según el tiempo de trabajo.

Horas	10	15	20	30	40	50	70	80	90	120	150
Cobro											



d. Con base en la expresión algebraica del inciso b o los datos de la tabla anterior, en el plano de la izquierda, elaboren la gráfica que modele la situación.

- ¿Qué datos se ubican en el eje horizontal? ______
- ¿Cuáles en el eje vertical? ______
- ¿Qué tipo de relación representa la situación? ______
- ¿Qué característica tiene la gráfica que trazaron? ______



e. La gráfica de la izquierda muestra el tiempo en minutos que emplea una fotocopiadora en escanear las páginas de un documento.

- Completa la información que falta en la gráfica.
- Representa la información en la tabla. Incluye el número de páginas escaneadas en 1, 2, 4, 5, 7 y 8 minutos.

Minutos						
Páginas escaneadas						

› Socialicen sus respuestas con el grupo y discutan las características de las gráficas y de las tablas representadas. Registren en el cuaderno los acuerdos que resulten. Validen con su profesor.

4. En pareja, comparen las expresiones algebraicas y las gráficas de los problemas de la actividad 3 y respondan. Justifiquen sus respuestas.

a. ¿Cómo son entre sí las expresiones algebraicas? ______

b. Sin considerar la unidad utilizada en cada caso, ¿cómo son entre sí las relaciones numéricas que hay en ambas gráficas? ______

c. Determinen si ambos casos representan una situación de proporcionalidad. Si es así, mencionen de qué tipo. Justifiquen con argumentos matemáticos. ______

› Socialicen sus respuestas con el grupo y discutan la relación entre la representación gráfica, tabular y algebraica de situaciones de proporcionalidad, como las estudiadas antes. Registren en el cuaderno sus conclusiones.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Cajas de cristal

5. En equipo, realicen lo que se indica y justifiquen sus respuestas.

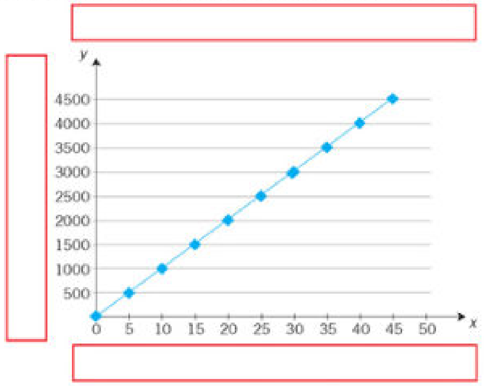
Brenda fabrica cajas de cristal para flores de polietileno, como la de la imagen que se muestra a la derecha. Su forma es de prismas con base cuadrada de 100 cm^2 y altura variable. Algunas tienen un volumen de 1 500, 2 000, 2 500, 3 000, 4 000 y 4 500 cm^3.

a. Completen los datos faltantes en la tabla.

Volumen (cm^3)	1 500	2 000	2 500	3 000	4 000	4 500
Altura						

- Describan el procedimiento que siguieron para completar la tabla. ______

b. La gráfica representa los datos del problema anterior. Asígnenle un título y nombren los ejes.



- Expliquen las características de la representación gráfica que modela el problema. ______

c. La expresión algebraica $y = 100x$ modela el problema de las cajas de cristal.

- ¿Qué representa el 100? ¿Qué valores corresponden a x y cuáles a y? ______

d. Comparen la expresión algebraica, la tabla y la gráfica de los problemas del punto 3 con las respectivas del problema de Brenda.

- ¿Los tres problemas se pueden representar con tablas, gráficas y expresiones algebraicas? Justifiquen su respuesta. ______
- Expliquen qué tipo de proporcionalidad caracteriza los problemas estudiados.

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y determinen las características de las gráficas y expresiones algebraicas que modelan el tipo de relaciones de proporcionalidad trabajadas.

Distintas representaciones

6. **En equipo, analicen y hagan lo que se pide.**

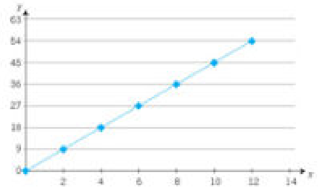
En la siguiente actividad se presentan dos expresiones algebraicas, dos gráficas y dos tablas. Seleccionen, en cada caso, la que represente una situación de proporcionalidad directa, completen la oración y planteen un problema que se solucione con ella.

a. Expresiones algebraicas: • $y = 3x + 4$ • $y = 4.5x$

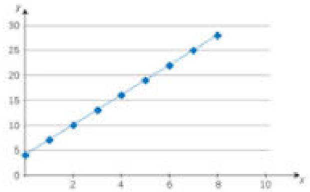
- La expresión algebraica ______ representa una relación de proporcionalidad directa, debido a ______
- Planteamiento: ______

b. Gráficas:

Gráfica 1



Gráfica 2



- La gráfica ______ representa una relación de proporcionalidad directa, debido a ______
- Planteamiento: ______

c. Tablas:

Tabla 1					
1	2	3	4	5	6
7	10	13	16	19	22

Tabla 2						
1	2	3	4	5	6	7
4.5	9	13.5	18	22.5	27	31.5

- La tabla ______ representa una relación de proporcionalidad directa, debido a ______
- Planteamiento: ______

d. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en cada representación? ______

e. ¿El problema del inciso c se puede modelar con una gráfica o con una expresión algebraica? Justifiquen su respuesta. ______

f. ¿Por qué las opciones no elegidas no representan una relación de proporcionalidad? ______

g. ¿Todas las gráficas de proporcionalidad son lineales? Justifiquen su respuesta. ______

› Compartan sus resultados con el grupo y registren sus conclusiones.

© SANTILLANA

Las máquinas de serigrafía

7. **Analicen y respondan con argumentos lo que se solicita.**

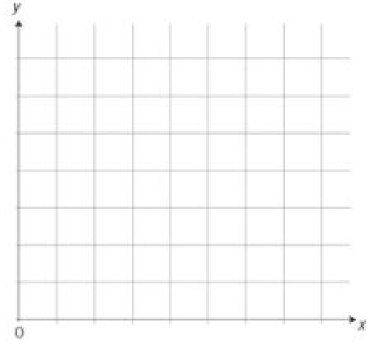
Una empresa de serigrafía tiene cinco máquinas para grabar logos en vasos, playeras y otros artículos. Se sabe que con tres máquinas produce 1 800 logos en tres días. La empresa necesita entregar 4 000 vasos para una graduación en tres días.

a. Si utiliza las cinco máquinas, considerando que todas tienen la misma capacidad de producción, ¿la empresa podrá cumplir la entrega? ______

- ¿Cuántos vasos grabados puede producir en los tres días? ______

b. ¿La situación anterior es de proporcionalidad? ______

- Si la respuesta anterior fue sí, ¿de qué tipo de proporcionalidad se trata? ______



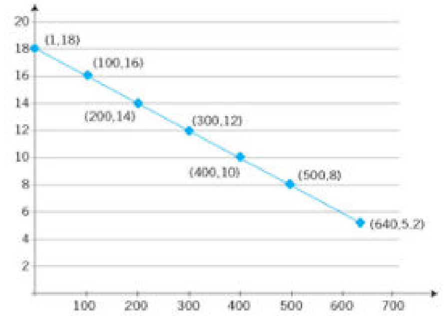
c. Tracen la gráfica que representa la situación en el plano de la derecha.

d. Registren la ecuación o expresión algebraica correspondiente: ______

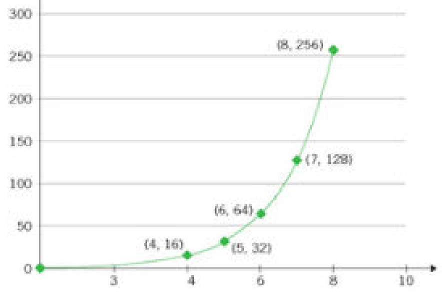
En la empresa graficaron la relación entre el costo de producción por pieza, según el número de artículos grabados. Consideren que esto representa una relación de proporcionalidad.

e. Analicen y elijan la gráfica que modela dicha relación.

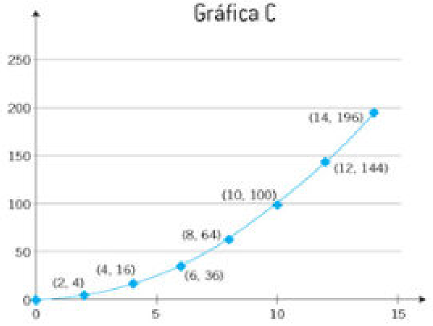
Gráfica A



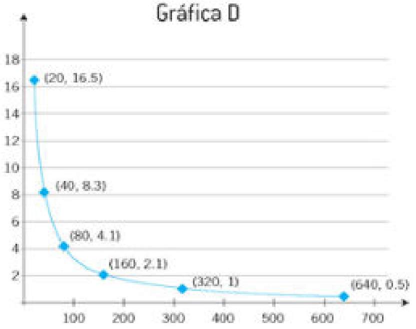
Gráfica B



Gráfica C



Gráfica D



© SANTILLANA

- ¿Qué tipo de proporcionalidad modela la gráfica seleccionada? __________

f. Elaboren en su cuaderno una tabla de datos que muestre la información de la gráfica anterior.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la situación de proporcionalidad establecida? __________

g. Escriban en su cuaderno un problema que se pueda modelar con la gráfica, la tabla o la expresión algebraica anteriores.

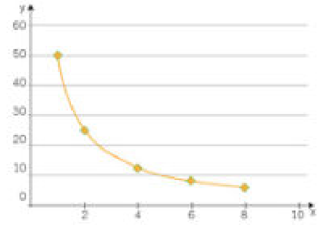
› Expongan al grupo sus planteamientos y, con la guía del profesor, compartan sus respuestas. Después registren sus conclusiones.

Relación entre distintas representaciones

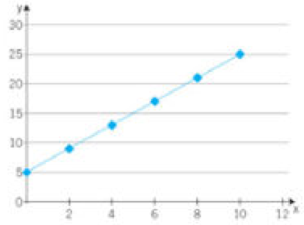
8. Analiza la información y contesta con argumentos matemáticos lo que se pide.

En seguida se muestran cuatro gráficas, dos expresiones algebraicas y dos tablas de datos, que representan distintas relaciones de proporcionalidad.

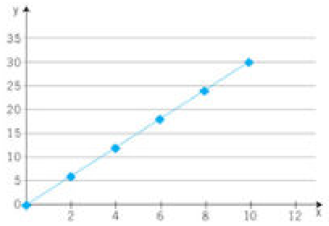
Gráfica 1



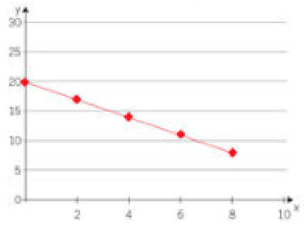
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



Expresión 1: $y = 3x$

Expresión 2: $y = 2x + 5$

Tabla 1

0	2	4	6	8
20	17	14	11	8

Tabla 2

1	2	4	6	8
50	25	12.50	8.33	6.25

a. ¿Qué gráficas se relacionan con las expresiones algebraicas? __________

b. ¿Cuáles gráficas se relacionan con las tablas? __________

© SANTILLANA

c. ¿Cuáles gráficas representan una relación lineal? Explica tu respuesta. __________

d. ¿Cuáles son de proporcionalidad y de qué tipo? Justifica. __________

e. ¿Cuáles gráficas, además de ser lineales, también son de proporcionalidad? ¿Por qué? __________

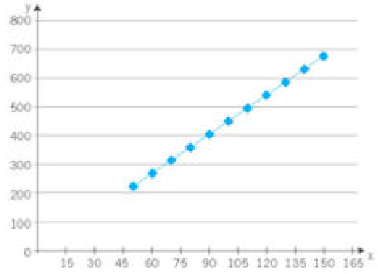
f. Plantea en el cuaderno un problema que se pueda resolver con cada gráfica.

9. Realiza lo que se indica.

a. Determina si la gráfica, la tabla y la expresión algebraica representan una misma relación de proporcionalidad. Explica de qué tipo de proporcionalidad se trata.

0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
2.25	6.75	11.25	15.75	20.25	24.75	29.25	33.75	38.25	42.75	47.25

Expresión algebraica: $y = 4.5x$



b. Escribe en el cuaderno un problema que se pueda modelar con la información que muestran las distintas representaciones.

› Comenten con el grupo sus resultados y propuestas. Con la ayuda del profesor, registren en el cuaderno los acuerdos acerca de las características de las distintas representaciones de relaciones de la forma $y = kx$.

Reto — Relaciones de la forma $y = kx$

1. En pareja, resuelvan los problemas.

a. Representen por medio de una tabla de valores, y gráficamente, las siguientes expresiones algebraicas. Planteen en su cuaderno un problema para cada caso.

- $y = \frac{1}{2}x$
- $y = 1\,200x$
- $y = 0.5x$

b. Definan las características de cada representación para una relación de proporcionalidad.

- Tabla de datos: __________
- Gráfica: __________
- Algebraica: __________

› Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas en grupo.

Apoyo tecnológico

Ingresa al sitio portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas1 y selecciona el recurso "Variación proporcional". Ahí encontrarás información teórica y ejercicios para que practiques el contenido de la lección.

Discute con tus compañeros la información que se encuentra en la página y analicen juntos los ejemplos propuestos. Si hay dudas, pidan apoyo al profesor.

(consulta: 23 de enero de 2017)

© SANTILLANA

5

Relaciones de variación cuadrática

Eje: Manejo de la información
Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Tiempo (s)	Altura (cm)
0.00	0.0
0.25	4.7
0.50	8.8
0.75	12.2
1.00	15.0
1.25	17.2
1.50	18.8
1.75	19.7
2.00	20.0
2.25	19.7
2.50	18.8
2.75	17.2
3.00	15.0
3.25	12.2
3.50	8.8
3.75	4.7
4.00	0.0

Los efectos de la ley de gravedad

1. **Lee la información y resuelve.**

Mónica y Paulina realizan un experimento que consiste en lanzar un balón para analizar cómo influye la ley de gravedad (la cual dice que un objeto atrae a los demás con una fuerza que es directamente proporcional a las masas) en el cambio de altura. Con la ayuda del profesor de Física, Paulina registró los tiempos del rebote mientras Mónica lanzaba el balón. Los resultados se muestran en la tabla de la izquierda.

a. ¿Cómo cambia la altura del balón en el intervalo de 0 a 2 segundos? ____________

b. ¿Cuál es la diferencia de altura entre 0.25 y 0.50 s? ____________

c. ¿En qué tiempo el balón alcanza la mayor altura? ____________

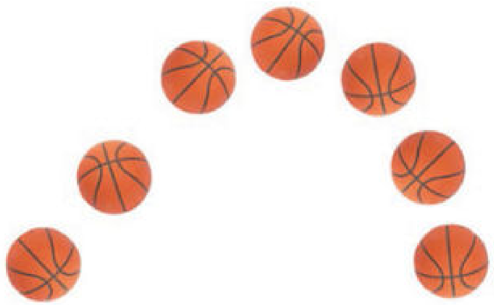
d. ¿Qué relación hay entre el tiempo que el balón alcanza su máxima altura y el tiempo que tarda en regresar a 0 cm? ____________

e. ¿Qué sucede con la altura del balón en los segundos 2 a 4? ____________

f. En los intervalos de tiempo que has analizado, ¿la altura que se recorre en cada uno es la misma? Argumenta tu respuesta. ____________

g. ¿Qué patrón identificas entre los datos de la tabla? Explícalo. ____________

La imagen de la izquierda muestra el movimiento que siguió el balón al rebotar contra el suelo.



h. ¿Cómo se puede describir la manera como el balón aumenta su altura en cada lapso de tiempo? ____________

i. Investiga el nombre del movimiento que muestra la trayectoria del balón.

j. ¿Existirá alguna relación entre el movimiento que sigue el balón y la gráfica que lo represente? ____________

› Socializa tus respuestas. En equipo, reflexiona cómo sería una gráfica que muestre el movimiento del balón, a partir de los datos de la tabla.

© SANTILLANA

Representación algebraica

2. **En equipo, resuelvan las actividades a partir del problema de Mónica y Paulina.**

a. ¿Los datos de la tabla de la página anterior representan una relación de proporcionalidad? Argumenten su respuesta. ____________

b. ¿Representa una relación lineal? Justifiquen. ____________

c. Analicen estas expresiones algebraicas y observen los valores de la tabla.

- $h = 5t^2$ • $h = 5t^2 - 20t$ • $h = 20t$ • $h = -5t^2 + 20t$
- ¿Cuál de las expresiones modela la situación? Argumenten su respuesta. ____________

d. Determinen cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente de la expresión algebraica y qué representa cada una. ____________

e. Con base en lo comprobado, y lo visto en la lección 1, expliquen por qué los datos del lanzamiento del balón representan una relación de variación cuadrática. ____________

f. Si lo consideran pertinente, amplíen la información sobre una relación de variación cuadrática en un medio electrónico o impreso.

› Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos. Después analicen en grupo la siguiente información.

La expresión algebraica o ecuación de la actividad anterior es un caso particular del fenómeno que se conoce como *caída libre*, para determinar la altura desde la que cae un objeto. Dicha expresión es $h = \left(\frac{1}{2}\right)gt^2 + v_0t$, donde g es la fuerza de gravedad y tiene un valor de 9.8 m/s² (en el ejemplo del balón de basquetbol se redondeó a 10 m/s²); t es el tiempo y se mide en segundos; v_0 es la velocidad inicial y se mide en m/s. Con base en lo anterior, utilizamos la expresión $h = -5t^2 + v_0t$. Consideren que cuando un objeto se lanza hacia arriba, g se representa con signo negativo.

g. Utilicen esta información para complementar sus acuerdos. Revisen las respuestas de la página anterior y, si es necesario, corríjanlas con el apoyo de su profesor.

3. **Lean la información, completen la tabla y respondan las preguntas de la siguiente página.**

a. En una prueba de despegue de un cohete, se sabe que $v_0 = 180$ m/s. Completen la tabla, usando la expresión algebraica de la caída libre.

Tiempo (segundos)	3	8	17	18	19
Altura (m)					

© SANTILLANA

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete? ______
- ¿Cuántos segundos transcurren desde que se lanza hasta que cae al piso? ______
- Anoten la ecuación que modela el problema. ______

b. En otra prueba, en el cohete lanzado se modifica la velocidad inicial a $v_0 = 200$ m/s.

- Construyan una tabla que muestre la relación entre el tiempo y la altura.

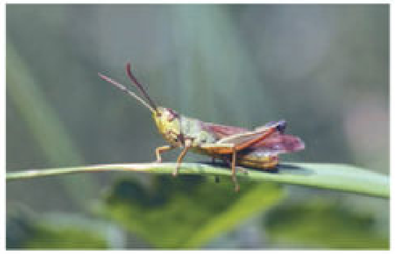
Tiempo (segundos)							
Altura (m)							

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete? ______
- ¿En cuánto tiempo llegará nuevamente al suelo? ______
- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente? ______

› Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en función de las características de un registro tabular y de la ecuación que representa una función cuadrática.

Problemas cuadráticos

4. Analicen los planteamientos y resuelvan.



Chapulín proviene del náhuatl *chapōlin*, de *chapā(nia)*, rebotar, y *ōlli*, hule, por eso significa "insecto que brinca como pelota de hule".

a. Míriam es zoóloga y está caracterizando al chapulín (*Tettigonia viridissima*). En sus estudios determinó que la expresión algebraica que representa la relación entre la altura del brinco de este insecto y el tiempo se puede expresar como: $h = -5t^2 + 8t$.

- ¿Qué representan las literales h y t en la expresión algebraica? ______
- Consideren la expresión algebraica y completen los datos de la tabla.

Tiempo (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
Altura (m)									

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el chapulín? ______
- ¿En qué tiempo logra la altura máxima? ______
- ¿Cuánto tiempo dura su salto? ______

b. Alfonsina es pintora y vende sus cuadros. Ella piensa incrementar sus ganancias aumentando el precio de los cuadros. Para estimar sus ingresos, Alfonsina consideró la expresión algebraica $G = p(110 - p)$, en la cual G representa sus ganancias si cobra p pesos por cada pintura. Sin embargo, corre el riesgo de que, si aumenta demasiado el precio, sus ganancias disminuyan.

- ¿Cuál es la variable dependiente en esta expresión algebraica? ______
- ¿Cuál es la variable independiente? ______

© SANTILLANA

- Completen el siguiente registro tabular. Consideren cantidades a partir de $10 con incrementos de la misma cantidad.

Incremento												
Ganancia mensual												

- ¿Cuál es el precio que le dará a Alfonsina la ganancia máxima? ______
- ¿Cuál es el patrón que se observa en los datos del registro tabular? ______
- Expliquen por qué los dos planteamientos anteriores corresponden a una función cuadrática. ______

c. A Osiris le dejaron de tarea escribir una expresión algebraica que modele la multiplicación de un número natural por su consecutivo; para ello le pidieron verificar dicha expresión con los datos de la siguiente tabla.

Número	Producto del número por su consecutivo
10	110
15	240
20	420
25	650
30	930
35	1 260
40	1 640
45	2 070
50	2 550
55	3 080
60	3 660

- Escriban una literal con la cual se pueda determinar cualquier número natural. ______
- Con base en la literal escrita, ¿cuál es la expresión que determina el número consecutivo? ______
- ¿Qué expresión representa el producto de los números anteriores? ______
- ¿Es posible que el producto sea una expresión cuadrática? ¿Por qué? ______
- Dada la expresión anterior, verifiquen que la relación de la tabla sea correcta.

› Socialicen sus respuestas y comparen sus procedimientos con otros compañeros. Si existen dudas o diferencias, valídenlas con el profesor. Registren en el cuaderno sus acuerdos y conclusiones acerca de lo trabajado.

© SANTILLANA

Funciones cuadráticas en áreas y perímetros

5. **En pareja, resuelvan lo siguiente.**

El perímetro del rectángulo que se muestra mide 20 cm y uno de los lados tiene una longitud k cm.

a. Escriban una expresión que represente la medida del otro lado del rectángulo en función del perímetro y de k. ______

- En este caso, ¿qué significa k? ______
- ¿Cuántos valores puede tener k? ¿El valor de k puede ser cero? Justifiquen sus respuestas. ______
- ¿Se puede afirmar que k representa una variable? Argumenten. ______

b. Determinen una expresión algebraica para obtener el área del rectángulo en función de la medida del perímetro y del lado k. Anótenla dentro de la figura.

- ¿La expresión algebraica anterior es una ecuación cuadrática? ¿Por qué? ______
- En la ecuación establecida, ¿cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? ______

c. Si la longitud del lado k es de 8 cm, ¿cuál es la medida de su área? ______

d. Usen la expresión algebraica que modela el problema para completar la tabla.

Longitud de k (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud del lado, en función de k y del perímetro									
Área (cm²)									

- Conforme aumenta la longitud del lado k, ¿qué sucede con la medida escrita en función de k y del perímetro? ______
- ¿Qué sucede cuando el lado k mide 10 cm o más? ______
- Consideren el uso de números decimales hasta décimos. ¿Cuál es el mínimo y el máximo valor que puede adquirir k? ______
- ¿Cuál es la mayor área posible de un rectángulo con ese perímetro? ______
- ¿Qué patrones identifican entre los datos de la tabla? Explíquenlo. ______

© SANTILLANA

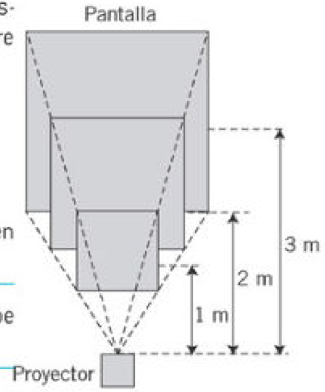
e. El rectángulo de la derecha tiene un perímetro de 110 m y un lado de longitud g cm.

- Determinen la expresión algebraica que permite obtener su área en términos de g. ______
- ¿Cuál es la mayor área posible de un rectángulo con ese perímetro? ______

› Socialicen sus respuestas y discutan qué tipo de relación o función se establece entre los datos de los problemas propuestos. Escriban en el cuaderno sus conclusiones.

6. **Analiza la información y resuelve.**

Rolando es biólogo marino y en una presentación usó un proyector de diapositivas para mostrar organismos unicelulares. La medida del área de la pantalla depende de la distancia entre el proyector y la misma, como se ilustra en la imagen de la derecha.



Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	2	3
Área de la imagen en m²	4	16	36

a. Determina la expresión algebraica que modela la relación entre la distancia y el área en cada uno de los momentos de la proyección de las diapositivas. ______

b. Aplica la expresión algebraica que construiste y determina a qué distancia se debe colocar el proyector, de manera que el área de la imagen sea de 25 m². ______

c. Registra los datos faltantes en la tabla.

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1.25	2.25	3.25	4.25
Área de la imagen en m²				

d. Determina al menos tres características de una función cuadrática.

- ______
- ______
- ______

› Socializa tus respuestas con el grupo y discute las características de una gráfica que represente una relación cuadrática como las estudiadas. Después registra los acuerdos que concluyan.

Reto Modelación matemática

1. **En pareja, planteen un problema que se represente con cada una de estas expresiones algebraicas y elaboren la tabla de datos correspondiente.**

a. $A = x^2 - 6x$ **b.** $H = -16t^2 + 8t$ **c.** $A = (18 + l)l$

› Comparen su trabajo en clase. Registren las dificultades o dudas que enfrentaron y exténmenlas para aclararlas con ayuda del grupo y del profesor.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio: http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/fn_cuad_graf/fn_cuad.html podrás encontrar información adicional al tema que se estudió. En particular analiza la información de la sección "Gráfica de funciones cuadráticas".

Comparte tus experiencias en clase. Si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 28 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

6

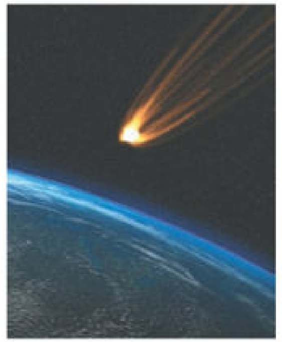
Complementarios, mutuamente excluyentes e independientes

Eje: Manejo de la información
Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Impacto del asteroide *Apophis* contra la Tierra

1. Lee la información y resuelve lo que se solicita.



El asteroide *Apophis* tiene un periodo orbital de 323 días, y en su trayectoria atraviesa la órbita de la Tierra dos veces en cada vuelta al Sol.

Científicos reducen la probabilidad de impacto del asteroide *Apophis* contra la Tierra en 2036.

Cálculos realizados con base en nuevas técnicas y datos actualizados demuestran que la probabilidad de choque del asteroide *Apophis* con la Tierra en 2036 es cinco veces menor que la que se estimaba antes, afir aron Steve Chesley y Paul Chodas, científicos del *Jet Propulsion Laboratory* de la Agencia Aeroespacial Norteamericana (NASA).

Las últimas observaciones permitieron establecer que en 2068 el asteroide se aproximará a la Tierra con tres posibilidades en un millón de hacer impacto en nuestro planeta.

Fuente: www.tecnologiahechapalabra.com/ciencia/miscelanea/articulo.asp?i=4137 (Consulta: 30 de diciembre de 2016, 11:34 horas.)

a. ¿Entre qué números es posible representar la probabilidad de que se impacte el asteroide *Apophis* contra la Tierra? Justifica tu respuesta. ______

b. En este caso, ¿qué significa la medida numérica asociada al impacto del asteroide con la Tierra? ______

c. ¿Qué formas numéricas permiten representar la probabilidad de que ocurra un evento? Escríbelas usando el fenómeno descrito. ______

d. ¿Cómo son entre sí las diferentes representaciones numéricas de la probabilidad de un evento? ______

e. Explica por qué la medida de la probabilidad puede ser representada por una razón entre los eventos favorables y el total de eventos posibles. ______

______

En otra investigación realizada con el apoyo de satélites militares, pudieron calcular que la probabilidad de que un asteroide impacte contra la Tierra es de uno por cada 1 000 años. La investigación ha analizado 300 impactos de pequeños meteoritos ocurridos en la atmósfera desde 1994.

Fuente: www.tendencias21.net/Una-nueva-investigacion-eleva-a-1-000-anos-la-probabilidad-de-choque-con-un-gran-asteroide_a58.html (Consulta: 30 de diciembre de 2016, 11:40 horas.)

© SANTILLANA

f. Obtén la probabilidad de que choque un asteroide contra la Tierra. ______

g. Compara la probabilidad anterior con la probabilidad de que el asteroide *Apophis* colisione contra la Tierra. ¿Qué evento es más probable que ocurra? Justifica tu respuesta. ______

______

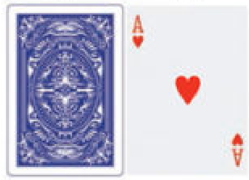
h. Reflexiona sobre cómo podrías representar la probabilidad de que ocurran dos eventos distintos para poder compararlos.

› Analicen en grupo sus respuestas y argumentos. Comenten lo que saben o lo que crean que significa la escala de la probabilidad de un evento y cómo se representa. Elaboren conclusiones y registren sus acuerdos.

Escala de probabilidad

2. Resuelvan en pareja lo siguiente.

Cara posterior (P) — Cara delantera (D)



La baraja inglesa es un conjunto formado por 52 naipes o cartas.

Joshua realizará un experimento que consiste en extraer tres cartas iguales de una bolsa oscura y predecir si saldrá la cara delantera (D) o la posterior (P). Para ello, toma una carta de la bolsa y, sin verla, la coloca sobre una mesa cubriéndola con la palma de la mano; después observa la cara obtenida. Esto lo realiza tres veces, sin regresar las cartas a la bolsa.

a. ¿Cuáles son los resultados posibles que obtendrá Joshua al realizar el experimento con las tres cartas? Expliquen su respuesta. ______

______

b. ¿Qué hicieron para tener la respuesta? ______

______

c. Completen en el cuaderno una tabla como la que se muestra para determinar el **espacio muestral** del experimento anterior.

Carta 1	Carta 2	Carta 3	Resultado del experimento
D	D	D	DDD
D	D	P	DDP

Glosario

espacio muestral. Es el conjunto de todos los resultados o eventos posibles de un experimento aleatorio. Se denota con la letra *S*.

- Contrasten los resultados de la tabla con los que respondieron en el inciso a. ¿Son los mismos? ______
- ¿Qué evento tiene mayor probabilidad de ocurrir? ______
- ¿Cuál tiene menos probabilidad de ocurrir? ______
- ¿Cómo explicarían a una persona la forma de determinar y representar el espacio muestral del experimento anterior? ______

______

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En grupo, realicen los ajustes necesarios a su explicación y registren en el cuaderno sus conclusiones.

© SANTILLANA

3. **Sigan trabajando en pareja para hacer lo que se indica.**

a. Determinen la probabilidad de que ocurran los eventos de la tabla, de acuerdo con el experimento anterior, y completen los espacios.

Probabilidad del evento	Fracción común	Expresión decimal	Porcentaje
Ninguna cara posterior			
Ninguna cara delantera			
Tres caras posteriores			
Tres caras delanteras			
Dos caras delanteras			
Dos caras posteriores			
Dos caras amarillas			

- De los eventos anteriores, ¿cuál tiene mayor probabilidad de ocurrir? ________
- ¿Cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrencia? ________
- ¿Alguno de ellos es un evento imposible? Justifiquen su respuesta. ________
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una sola carta, la cara sea posterior o delantera? Argumenten su respuesta. ________

b. Ubiquen en la recta numérica la probabilidad de cada evento de la tabla. Después, respondan en su cuaderno.

- ¿Qué escala utilizaron? ¿Entre qué números se puede definir la probabilidad de que ocurra un evento? Expliquen su respuesta.
- ¿Qué significa que la ocurrencia de un suceso sea cero?
- ¿Qué sucede si la probabilidad de ocurrencia es 1?
- ¿Es posible que la probabilidad de un suceso aleatorio sea mayor que 1 o menor que cero? Argumenten su respuesta.

c. Escriban en su cuaderno tres eventos de ocurrencia segura y tres imposibles. Justifiquen su registro.

d. Reflexionen lo siguiente y respondan en su cuaderno.

- ¿Es posible que, al realizar el experimento, el resultado de una carta sea cara delantera y cara posterior al mismo tiempo? Expliquen su respuesta.
- ¿Por qué en un experimento aleatorio dos o más eventos posibles no pueden ocurrir al mismo tiempo?

› Socialicen sus resultados. Si hay dudas, coméntenlas en grupo para solucionarlas, con ayuda del profesor. Validen sus acuerdos con la siguiente información.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Cuando se realiza un experimento aleatorio, la medida de ocurrencia de un suceso A se llama **probabilidad** de A y se representa como **P(A)**. La probabilidad de que ocurra un evento es igual al cociente del número de eventos favorables entre el total de eventos posibles. Por ello, la escala de medida de un suceso siempre está comprendida entre 0 y 1.

Es un **evento seguro** el que está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral. Obtener sol o águila al lanzar una moneda es un suceso seguro. Un **evento imposible** es aquel que no tiene ningún elemento dentro del espacio muestral. Tirar un dado y obtener 7 es un evento imposible.

Complementarios y mutuamente excluyentes

4. **Resuelvan en equipo las siguientes actividades.**

a. Determinen el espacio muestral de lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo.

- S = {____________________}

b. Considerando el espacio muestral, escriban los datos faltantes en la tabla.

Evento o suceso	Resultados posibles del evento	Probabilidad
A: Cae un número par y sol.	A = {(2, S), (4, S), (6, S)}	$P(A) = \frac{3}{12}$
	B = {(2, A), (4, A), (6, A)}	
C: Cae un número mayor que 3 y águila.		
D: Cae número impar y sol.		
	E = {(1, A), (2, A), (3, A)}	
	F = {(4, S), (5, S), (6, S)}	

- Comparen los eventos A y F; ¿tienen elementos en común? ¿Qué los hace diferentes? ________
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o F? Expliquen su respuesta. ________
- ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos F y E? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno u otro? Justifiquen sus respuestas. ________
- ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos A y B? Argumenten. ________

c. Si se tienen los eventos: H = {(1, S), (2, S), (3, S)} y G = {(4, A), (5, A), (6, A)}, ¿pueden darse al mismo tiempo ambos? Expliquen su respuesta.

- ¿Qué significado pueden asociar al hecho de que dos eventos tengan elementos comunes? ¿Y al hecho de que dos eventos no tengan elementos comunes?

› Socialicen sus conclusiones con el grupo. Investiguen y comenten lo que entienden por eventos mutuamente excluyentes y registren sus acuerdos.

5. **Analicen las situaciones y resuélvanlas en pareja.**

a. Determinen la probabilidad de los eventos J y K.

J = {(1, S), (2, S), (3, S), (4, S), (5, S), (6, S)}

K= {(1, A), (2, A), (3, A), (4, A), (5, A), (6, A}

- P(J): ______________ • P(K): ______________
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento J o K? ______________

b. Consideren los eventos A, B y C, al lanzar un dado, y determinen su probabilidad.

A = {1, 2} B = {3, 4} C = {5, 6}

- P(A): ____________ • P(B): ____________ • P(C): ____________
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A, el B o el C? ____________

› Socialicen sus argumentos. Una vez establecidas sus conclusiones, discutan la siguiente información para complementarlas.

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando no pueden ocurrir en forma simultánea. Por ejemplo, cuando al lanzar un dado y una moneda: el evento E = {(1, A), (2, A), (3, A)} no puede ocurrir al mismo tiempo que el evento F = {(4, S), (5, S), (6, S)} y viceversa. Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de uno u otro es igual a la suma de ambos. Cuando dos eventos no son mutuamente excluyentes, para calcular la probabilidad de que suceda uno u otro se suman las probabilidades y al resultado se le resta la probabilidad del evento común; por ejemplo, como ocurrió en la tabla de la página anterior.

Dos eventos o más se denominan **complementarios** cuando su unión da el espacio muestral y la suma de sus probabilidades es 1.

c. Retomen los datos de la tabla de la página anterior y determinen cuáles son mutuamente excluyentes, cuáles no, y calculen la probabilidad en cada caso.

- P(B o C) = ____________ • P(D o E) = ____________
- P(A o E) = ____________ • P(B o F) = ____________

d. Ahora escriban cuatro experimentos que dependan de la probabilidad. En cada caso debe haber un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes y uno de eventos complementarios. Si es necesario, construyan la tabla en su cuaderno.

Experimento	Espacio muestral	Eventos mutuamente excluyentes	Eventos complementarios

› Socialicen en clase sus propuestas. Sustenten con argumentos cada caso. Si hay dudas, coméntenlas con el profesor y lleguen a un consenso de grupo.

© SANTILLANA

Eventos independientes

6. **Lee la información y resuelve en tu cuaderno.**

a. En un juego, se lanzan cuatro volados consecutivos y en todos ellos cae sol.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el quinto volado también caiga sol? Argumenta.
- ¿Los resultados de los cuatro primeros eventos afectan el resultado del quinto? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el espacio muestral de cada volado?
- ¿La probabilidad de ocurrencia de un evento influye en la probabilidad de que suceda nuevamente al repetir el experimento *n* veces? Argumenta.

Volado, juego de azar que consiste en predecir qué lado de una moneda caerá cara arriba.

b. En una urna se tienen cinco fichas: una verde, una amarilla, una azul, una negra y una roja. Sin ver se saca una ficha...

- si se extrae la ficha negra y no se regresa a la urna, ¿cuál es la probabilidad de sacar la ficha verde en la segunda extracción? Explica tu respuesta. ¿Este resultado se ve afectado por la primera extracción? ¿Por qué?
- si se extrae la ficha negra y se regresa a la urna y en la segunda extracción sale la ficha azul y se regresa, y en una tercera nuevamente sale la negra, ¿qué probabilidad hay de sacar la ficha amarilla en una cuarta extracción?
- ¿Esta probabilidad se ve afectada por los resultados anteriores? Justifica.

› Socializa en grupo tus argumentos y compáralos con la siguiente definición.

Son **eventos independientes** cuando la probabilidad de ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro. En el caso de la urna, el hecho de extraer y regresar una ficha no afecta el resultado de la siguiente toma; la probabilidad de cada evento sigue siendo la misma.

› En grupo, registren en el cuaderno sus conclusiones y valídenlas con el profesor.

Reto Tres tipos de eventos aleatorios

1. **En pareja, señalen en cada caso qué tipo de eventos corresponden y por qué.**

a. Experimento: Lanzamiento de un dado y dos monedas

- Evento B = {2, sol, sol} • Evento C = {4, águila, águila}
- Los eventos: ______________ porque ______________

b. Experimento: Lanzamiento de tres monedas:

- Evento B = {S, S, S} • Evento C = {S, A, A}
- Los eventos: ______________ porque ______________

2. **Planteen un problema en el que se tenga que identificar la escala de probabilidad de un suceso aleatorio; tal como se estudió con el impacto del asteroide *Aphopis* contra la Tierra.**

› Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y pidan ayuda de su profesor para aclararlas.

Apoyo tecnológico

En la página siguiente, revisa los conceptos que se enuncian y realiza las actividades. Analiza los ejemplos para saber resolver los ejercicios.

www.amschool.edu.sv/paes/e6.htm

Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor.

(consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

7 Diseño y análisis de una encuesta

Eje: Manejo de la información
Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

La Profeco y la importancia de las encuestas

1. **En equipo lean la información y respondan las preguntas en su cuaderno.**

a. México es el segundo país de Latinoamérica que cuenta con una Ley Federal de Protección al Consumidor y el primero en crear una procuraduría del consumidor: la Profeco. Una de las funciones de la Profeco es difundir, para conocimiento de los consumidores, los resultados de encuestas y sondeos que realiza sobre diferentes productos.

- ¿Qué tipo de encuestas piensan que aplica la Profeco?
- ¿A qué tipo de público o personas consideran que encuesta la Profeco?
- ¿Han participado o han sido encuestados? Si es así, describan su experiencia; en caso de que no, comenten en qué tipos de encuesta les gustaría participar.
- ¿Cuál es la utilidad de realizar encuestas y sondeos?

b. México cuenta con una gran variedad de productos. Por eso, ante tantas opciones, algunas personas buscan información en encuestas para elegir qué comprar. Por ejemplo, en 2012, la Profeco realizó una encuesta sobre hábitos de renovación tecnológica con respecto de la telefonía celular.

- ¿Quiénes pueden tener interés en los resultados de este estudio?
- ¿Qué tipo de preguntas creen que se plantearon? Propongan algunas.
- ¿Cuántas personas sería necesario encuestar para tener información suficiente y darla a conocer? Expliquen su respuesta.

Glosario

aleatorio. Se dice que un evento es aleatorio cuando no es posible predecir o anticipar su comportamiento.

› Comenten en grupo acerca del tipo de encuesta que podrían realizar en la escuela y sus características. Registren sus acuerdos en su cuaderno.

2. **Reúnete con un compañero, analicen la información de la tabla y la de la siguiente página y resuelvan.**

En la tabla se enlistan algunos criterios que consideraron en la encuesta de la Profeco.

Objetivo	Identificar los hábitos de renovación y compra de nuevas tecnologías para teléfonos celulares.
Población objetivo	Personas mayores de 18 años que viven en el la Ciudad de México y que hayan comprado en el periodo de referencia al menos un teléfono celular.
Periodo de referencia	Del 18 al 28 de enero de 2012
Datos de la muestra	Se aplicó un cuestionario estructurado de 144 preguntas a 663 personas en 17 puntos de afluencia en 13 de las 16 delegaciones políticas de la Ciudad de México. Los puntos, como los entrevistados, fueron seleccionados **aleatoriamente**. Los resultados reportan 95% de confianza y 4% de error.

Fuente: www.Profeco.gob.mx/encuesta/mirador/2012/E_renov_tec_telefonia.pdf (consulta: 10 de abril de 2013)

© SANTILLANA

Un **cuestionario estructurado** es una lista de preguntas elaboradas previamente, las cuales siguen un orden que no se altera. Un cuestionario semiestructurado se basa en una lista de preguntas elaboradas, pero con la diferencia de que se pueden cambiar o reestructurar.

a. Analicen y discutan qué características se consideraron en la encuesta de la Profeco y respondan.

- ¿Por qué es necesario que una encuesta tenga un objetivo? ____________
- Por el tipo de encuesta, ¿importa el género de los encuestados? ¿Por qué? ____________
- ¿Qué ventajas o desventajas puede tener un cuestionario estructurado en comparación con uno semiestructurado? ____________
- ¿Por qué no se consideró encuestar a menores de 18 años? ____________
- ¿Por qué se usa el título de "Población objetivo"? ____________
- Reflexionen: ¿por qué se considera un periodo para aplicar la encuesta? ¿Qué sucede si no se cuenta con él?

b. Lean la información de la columna "Datos de la muestra" y contesten en su cuaderno.

- ¿Por qué piensan que eligieron puntos de afluencia aleatoriamente? Expliquen.
- Reflexionen: ¿qué sucedería con los resultados si la población objetivo fuera de otra entidad, cambiarían los resultados? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la relación que puede establecerse entre "población" y "muestra"?
- ¿Qué significa tener 95% de confianza y 4% de error?

c. En seguida se muestran algunos de los resultados de la encuesta anterior. Con base en estos, respondan en su cuaderno

- La mayoría (63%) de los encuestados contestó que compró teléfonos celulares; el que más adquirieron fue el aparato convencional.
- La razón principal por la que compraron un teléfono celular la última vez fue por renovar tecnología.
- Antes de realizar su compra solicitaron información con el vendedor.
- Con el teléfono celular realizan principalmente dos actividades: efectuar llamadas y enviar mensajes.
- ¿Qué preguntas creen que hicieron para obtener las respuestas anteriores? Propongan una para cada resultado.
- Si fueran encuestados, ¿qué tipo de preguntas les gustaría responder?
- ¿Usarían los datos de la encuesta para comprar un teléfono celular? Argumenten.
- Si aplicaran una encuesta, ¿cómo organizarían la información obtenida para darla a conocer? ¿Qué información matemática usarían en su estudio?

d. Escriban los elementos por considerar en el diseño de una encuesta y las condiciones que se requieren para llevarla a cabo.

› Socialicen sus respuestas. Analicen si en una encuesta es importante contemplar la calidad del producto, en este caso, del celular; su precio, el modelo, entre otros. Registren sus conclusiones.

© SANTILLANA

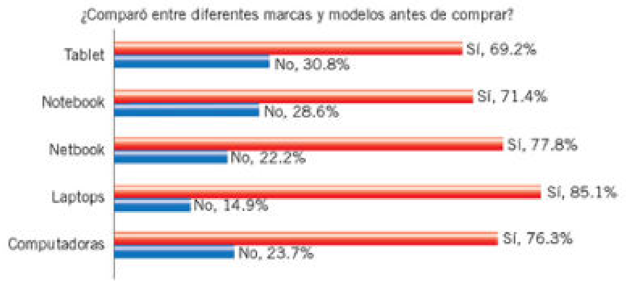
Renovación tecnológica en equipos de cómputo

3. **En equipo lean la información y respondan. Resuelvan en el cuaderno.**

a. Los datos que se muestran son resultados de una encuesta sobre la renovación de equipos de cómputo.

- El 50.5% de los entrevistados dijo que compró algún equipo de cómputo.
- La característica más importante tomada en cuenta al comprar el equipo de cómputo fue su funcionamiento.
- Los entrevistados mencionaron que sí compararon las características de otras marcas y modelos en diferentes tiendas, como los precios, antes de comprar.
- Las formas de pago para este artículo fueron en orden de importancia: de contado y a meses sin intereses con tarjeta bancaria o de tienda comercial.
- Los principales puntos de compra de los equipos de cómputo fueron tiendas de autoservicio y departamentales.
- Con los equipos de cómputo realizan principalmente dos actividades: usar paquetería para realizar tareas y trabajos y navegar por Internet.
- ¿Qué herramienta matemática es conveniente utilizar para representar los datos del primer aspecto que se menciona? Expliquen por qué.
- ¿Qué preguntas se pueden plantear con los resultados mostrados? Propongan algunas en su cuaderno.

b. Asocien el tipo de representación gráfica con los datos del inciso a.



© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Expliquen en su cuaderno las características de cada gráfica y las ventajas o desventajas de usarlas para representar los datos de una encuesta. Consideren la información que se presenta en seguida. Pueden usar una tabla:

- Tipo de escala
- Otras características
- Ventajas de su uso en la representación de datos
- Desventajas de su uso en la representación de datos

d. En grupo, lean en voz alta la información y realicen lo que se indica.

Encuesta: es una técnica cuantitativa que consiste en realizar una investigación sobre una muestra de sujetos que representa a un grupo o población específica. Una encuesta se efectúa, en el contexto de la vida cotidiana, utilizando procedimientos de interrogación para conseguir mediciones cuantitativas sobre una cantidad de características de la población.
Población: se trata de un conjunto de elementos sobre los cuales se realizan estudios, mediciones u observaciones.
Muestra: es una parte representativa de la población específica de la que interesa conocer su opinión. Se considera que debe ser al menos 10% de dicho grupo.

- Expliquen con sus propias palabras qué entienden por **mediciones cuantitativas.**
- Determinen al menos tres características de una encuesta.

› Socialicen sus dudas o dificultades con la finalidad de solucionarlas. Después registren una conclusión acerca de cuáles son las herramientas matemáticas adecuadas para presentar información obtenida en una encuesta.

4. **Lean en pareja la información, analicen las tablas y respondan.**

a. Los directores de una escuela preguntaron la cantidad de horas promedio que leen los alumnos de 3.° de secundaria y se obtuvieron los siguientes datos:

Hombres	Horas de lectura
100	1 h 15 min
78	1 h 45 min
50	2 h 10 min

Mujeres	Horas de lectura
145	1 h 22 min
90	1 h 52 min
45	2 h 15 min

- ¿Cuál es el total de la población? ______________________
- ¿Cómo obtendrían una muestra representativa de la población? ______________________
____
____
- ¿Qué conclusión pueden obtener de los datos de la tabla? ______________________
____

› Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en función de las ideas expresadas.

Hagamos una encuesta

5. **Organizados en equipos realicen lo siguiente.**

a. En consenso, seleccionen un tema relacionado con las siguientes preguntas para diseñar una encuesta. También pueden elegir otro.

- ¿Cuáles son las expectativas de un alumno al concluir el tercer grado de secundaria?
- ¿Cuáles son los intereses o gustos de un estudiante de secundaria?
- ¿Cuáles son las diferencias entre un alumno de secundaria y uno de educación media superior?

b. Consideren las acciones de la tabla y elaboren su plan para realizar la encuesta.

Planificación previa	
¿Qué voy a preguntar?	Diseñar el objetivo de la encuesta; recuerden que el objetivo consiste en definir qué aspecto de la población se va a investigar y, con base en esto, elaborar el instrumento. Determinar si el cuestionario será estructurado o semiestructurado.
¿A quién voy a preguntar?	Seleccionar la población y la muestra, así como el periodo de aplicación. Consideren al menos 10% de la población escolar.
¿Qué voy a hacer con los datos?	Organizar los datos y obtener resultados. Antes definir el tipo de preguntas y la cantidad de estas.
¿Cómo los voy a presentar?	Seleccionar la herramienta matemática adecuada para representar los datos.
Aplicación de la encuesta	
Procesamiento de datos	Determinar cómo organizarlos, mediante tablas, gráficas, cuadros de resultados; clasificarlos por género, edad, etcétera.
Presentación de datos	Seleccionar la manera de mostrarlos al grupo.

- Si consideran que falta algún elemento importante en el diseño de su plan para diseñar la encuesta, inclúyanlo.

› Presenten al grupo el plan de acción de su encuesta. Si es necesario, realicen los ajustes pertinentes. Si tienen dudas, resuélvanlas en grupo.

6. **Trabajen en su encuesta y registren sus experiencias durante el desarrollo.**

a. De acuerdo con las indicaciones del maestro, organícense para presentar al grupo sus resultados. Seleccionen el tema de una encuesta diferente de la suya y, conforme exponga el equipo que la trabajó, completen la siguiente tabla:

Encuesta:	
Objetivo:	
Población:	
Muestra:	
Resultados:	

© SANTILLANA

© SANTILLANA

b. De acuerdo con los resultados de su encuesta, contesten en el cuaderno:

- ¿Qué dificultades tuvieron para identificar la población estudiada?
- ¿Los resultados obtenidos pueden generalizarse a toda la población de estudio? Expliquen.
- ¿Qué ventajas y desventajas tiene el tipo de encuesta realizada?
- ¿Qué dificultades pueden presentarse al obtener los datos de una muestra?
- Sobre la elección de una muestra, ¿qué recomendaciones pueden dar a cualquier sujeto que diseñe, implemente e informe de una encuesta?
- ¿Cuáles son las ventajas o desventajas de la manera como decidieron presentar los datos de la encuesta?
- ¿Qué tipo de herramientas matemáticas son más convenientes para representar los resultados obtenidos al aplicar una encuesta?

7. **Con base en los resultados de su encuesta respondan.**

- ¿Cuáles son las expectativas de la mayoría al concluir el tercer grado de secundaria? ¿Coinciden con las suyas? ______
- ¿Cuáles son los intereses o gustos de un alumno de secundaria? ¿Son iguales a las suyas? ______
- ¿Por qué es importante saber las diferencias entre un alumno de secundaria y uno de educación media superior? ______

› Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en función de las ideas expresadas. Registren sus conclusiones acerca del trabajo realizado por el grupo.

Reto Una síntesis necesaria

1. **Reunidos en pareja, elaboren un tríptico que contenga lo siguiente:**
   a. Condiciones para diseñar una encuesta
   b. Características de la población de estudio
   c. Estrategias para elegir una muestra representativa
   d. Descripción de cómo obtener los datos de una muestra
   e. Recomendaciones para representar y mostrar la información recabada
2. **Apliquen lo anterior y realicen un estudio estadístico sobre cualquiera de los siguientes temas:**
   a. ¿Cuál fue el comportamiento del peso frente al dólar a lo largo del mes?
   b. ¿Cómo ha sido el alza o la baja de la canasta básica a lo largo de un año?
   c. ¿Cuál es el impacto de la contaminación química en México?
3. **Discutan en qué otros contextos es necesario conocer la opinión de la gente y planteen una situación, diferente a las dadas anteriormente, en la que sea necesario diseñar una encuesta.**

› Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

Antes de trabajar en su encuesta, visiten la siguiente página y lean el tema: "Procesamiento de la información: tablas y gráficos":

www.profesorenlinea.cl/matematica/Graficos.html

Discutan la información contenida en:

- Formas de recopilar, organizar, procesar e interpretar datos en tablas y gráficos
- Etapas para la recopilación y procesamiento de la información
- Apliquen lo analizado en el diseño de su encuesta. Compartan sus experiencias en clase. Si hay dudas, pidan apoyo al profesor. (27 de diciembre de 2016)

Para saber más

Cómo seleccionar una muestra

En la lección 7 aprendiste a diseñar una encuesta y cómo identificar la población que se estudia. En esta sección ampliarás tus conocimientos sobre formas de elegir una muestra. El desafío consiste en encontrar una que represente la población de manera adecuada.

1. Resuelvan en pareja lo siguiente.

a. Un canal de televisión nacional pidió a la audiencia que llamara por teléfono para contestar cinco preguntas sobre la honradez: *¿Son honrados los mexicanos? Teclea 1 si tu respuesta es "Sí" y 2 si es "No".*

- *Si hallaras una billetera, ¿la regresarías a su dueño?*
- *Si al hacer una compra te dieran cambio de más, ¿regresarías el dinero extra?*
- *Si al pagar un artículo notas que se han cambiado las etiquetas y vas a pagar mucho menos por la prenda, ¿serías honesto y pagarías el precio real?*
- *Tienes acceso a un teléfono con crédito, ¿lo usarías para llamar a tus amigos sin pedir autorización?*
- *¿Navegarías en Internet aunque el pago se realice con la tarjeta de crédito de alguien más?*

- ¿Cuál piensan que es el **plan de muestreo** para esta encuesta? Justifiquen su respuesta. ____________________
- ¿Cuáles son la población y la muestra? Expliquen. ____________________

Supongan que 49 569 790 personas llamaron para responder la encuesta del canal y que 48 349 566 presionaron la tecla 1 a la pregunta 2. ¿Qué porcentaje de gente contestó "No" a la pregunta? ____________________

- De acuerdo con el último censo realizado por el Inegi, se sabe que la población en México es de 112 336 538 habitantes. ¿Qué porcentaje de la población total del país contestó la encuesta? ____________________
- ¿Puede ser representativa la muestra que contestó la encuesta? ¿Por qué? ____________________

Glosario

plan de muestreo. Es una estrategia para elegir la muestra de una población. El plan se diseña de acuerdo con las características de la información que se quiere obtener de la población.

© SANTILLANA

b. En la siguiente tabla se muestran algunas de las respuestas de los encuestados. Consideren la información de la página anterior, complétenla y contesten lo que se pide.

Pregunta	Sí	No
1	45 678 456	
3		21 234 212
5	47 987 876	

- ¿Qué conclusiones pueden establecer con los datos de la tabla anterior? ____________________
- ¿Qué respuesta puede darse a la pregunta: *¿Son honrados los mexicanos?* Expliquen. ____________________
- ¿Las conclusiones serían las mismas si la encuesta hubiera sido contestada por menos de 10 000 personas? Expliquen. ____________________

› Comenten sus respuestas con otra pareja. Si tienen dudas, pidan ayuda al profesor.

2. **Lean la siguiente información y respondan en su cuaderno.**

En la clase de Matemáticas de Porfirio quieren determinar cuántos estudiantes tienen acceso a televisión de paga. El grupo se divide en cuatro equipos, y cada uno traza un plan de muestreo para conseguir una muestra de la población de la escuela.

Equipo 1: Cada integrante entrevistará a los alumnos que van en su ruta en el transporte escolar.
Equipo 2: Cada estudiante entrevistará a cada tercer alumno en la fila de la cafetería.
Equipo 3: Cada integrante buscará voluntarios para ser entrevistados durante el recreo.
Equipo 4: Cada miembro seleccionará al azar 10 alumnos de cada grupo de primero, segundo y tercero de secundaria. Para ello, escribirán los números de lista en papeles y extraerán 10 de ellos.

La participación de los alumnos en las encuestas favorece la expresión libre de ideas.

- Determinen las ventajas y desventajas de los planes de muestreo de los cuatro equipos.
- ¿Qué plan proporciona la mejor muestra representativa para el estudio?
- Propongan otro plan de muestreo distinto. Indiquen cuál es la ventaja de utilizarlo.

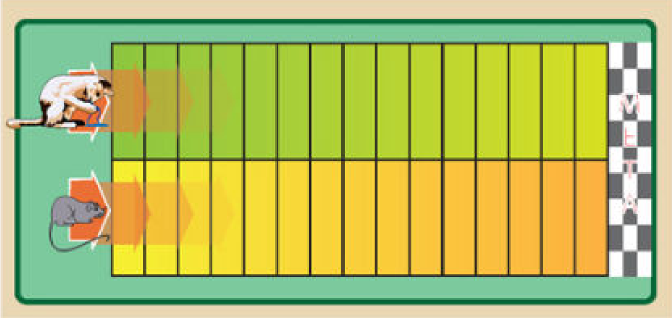
› Socialicen sus respuestas con el grupo y registren sus acuerdos. Después, lean la siguiente información e investiguen más sobre los distintos tipos de muestreo.

La estrategia del equipo 1 es un ejemplo de **muestreo de conveniencia**, la del equipo 2 es un ejemplo de **muestreo sistemático**, la estrategia del equipo 3 es una estrategia de **muestreo de respuestas voluntarias**, y el último es un **muestreo aleatorio**. Cuando un método de muestreo no logra representar adecuadamente una población, se dice que hay un sesgo de selección.

© SANTILLANA

Evaluación tipo PISA

› Elige la opción con la respuesta correcta.



En un juego de mesa, un gato y un ratón compiten en una carrera para llegar a la meta. Durante el desarrollo del juego se presentan distintos eventos para determinar al ganador.

1. Se lanza un dado, y sea el evento A: *el gato avanza si cae tres o números menores que tres*; el evento B: *el ratón avanza si cae cinco o mayores que él*. Por tanto se tiene que: P (A o B) = P(A) + P (B). P (A o B) = $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, y por lo tanto P (A o B) = $\frac{5}{6}$. La ocurrencia de los eventos A o B es un ejemplo de:

A) eventos imposibles. **B)** eventos mutuamente excluyentes.
C) eventos independientes. **D)** eventos complementarios.

2. Al lanzar un dado, sea el evento C: *el gato avanza si caen números pares*; el evento D: *el ratón avanza si caen números impares*. P(C o D) = $\frac{3}{6} + \frac{3}{6}$, por tanto, los eventos C y D son:

A) eventos complementarios. **B)** eventos mutuamente excluyentes.
C) eventos simples. **D)** eventos incluyentes.

3. Considera dos urnas. En la urna K se tienen 17 bolas blancas y 23 bolas negras. En la urna L, hay 16 blancas y 14 negras. Se tiene el evento A: *sacar una pelota blanca de la urna K*: P(A) = $\frac{17}{40}$; el evento B: *sacar una bola blanca de la urna L*. P(B) = $\frac{16}{30}$. Por tanto, A y B son:

A) eventos complementarios. **B)** eventos simples.
C) eventos independientes. **D)** eventos seguros.

› Realiza lo que se indica en cada caso.

4. Con los datos del problema de la carrera del ratón y del gato y de las urnas, plantea dos eventos mutuamente excluyentes, dos eventos complementarios y un par de eventos independientes.

a. Eventos mutuamente excluyentes: ______________________

b. Eventos complementarios: ______________________

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Eventos independientes: ______________________

5. Se modifica el juego del gato y del ratón y ahora se lanzan dos dados. Sea el evento A: *cae 6 y 4*, y el evento B: *cae 5 y 3*. Estos son eventos ______________ ______________ debido a que ______________

6. Si el ratón avanza el cociente de los números que salen al lanzar dos dados, sea el evento A: *cae 4 y 2*, y B: *cae 6 y 3*, los eventos son: ______________ debido a que ______________

7. Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. ______________________

8. Determina si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas.

Oración	Veracidad
Dos eventos o más son complementarios cuando su unión da el espacio muestral y la suma de sus probabilidades es menor que 100%.	
Cuando la probabilidad de un evento A no es afectada por el resultado de otro B, estos eventos son eventos dependientes.	
Los eventos *cae un número mayor que 3 y sol y cae un número menor que 4 y águila* son eventos mutuamente excluyentes, ya que no pueden ocurrir al mismo tiempo.	
Los eventos independientes tienen probabilidad menor que 1 y mayor que 0.	

a. Reescribe las oraciones falsas de manera que ahora comuniquen una verdad. ______________

Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Completa la tabla con los términos *siempre*, *a veces* o *poco*.

Indicadores			
Identifico y planteo, dada una experiencia aleatoria, eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.		Argumento y comunico de manera oral y escrita las diferencias entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	
Calculo la probabilidad teórica de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independiente.		Resuelvo problemas de manera autónoma asociados a las nociones de probabilidad.	

En clase, externa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.

BLOQUE 2

Invitación a la lectura

El teorema de Pitágoras en las culturas antiguas

Pitágoras y sus seguidores (conocidos como los pitagóricos) fueron un grupo de antiguos griegos que se dedicaron al estudio de las matemáticas y plantearon la importancia del número en el cosmos. Consideraban que todas las cosas son numerables y la relación entre dos cosas se puede expresar por una proporción numérica. Precisamente, Pitágoras es recordado en gran parte por el teorema que lleva su nombre e indica la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

El teorema lleva ese nombre porque su descubrimiento y exposición teórica recae sobre la escuela pitagórica, pero se sabe que fue usado mucho antes de la existencia de Pitágoras. En las culturas mesopotámica y egipcia, se conocía la existencia de ternas de valores que se corresponden con los tres lados de un triángulo rectángulo: las llamadas ternas pitagóricas que consisten en conjuntos de tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras, es decir, números a, b y c que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$ (algunos ejemplos son: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25), (12, 16, 20), entre otros). Estas ternas se usaban para resolver problemas referentes a triángulos rectángulos. Los mesopotámicos dejaron constancia de esto en tablillas grabadas con escritura cuneiforme. En el siglo XIX, al descifrar la tablilla llamada Plimpton 322, se encontró que contiene una lista de ternas pitagóricas.

Los egipcios emplearon el teorema en forma práctica para construir ángulos rectos, lo cual es muy útil al realizar obras arquitectónicas. El triángulo sagrado egipcio, de proporciones 3, 4, 5, se construye tomando una cuerda y haciéndole una serie de nudos de forma que en ella queden 12 partes iguales. Al poner la cuerda para hacer un triángulo cuyos lados sean 3, 4 y 5, el ángulo opuesto al lado mayor siempre es un ángulo de 90°. La pirámide de Kefrén, construida en el siglo XXVI a. de C., se construyó basándose en el triángulo sagrado egipcio.

Actualmente, el teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos.

› **Subraya la respuesta correcta y contesta.**

1. El teorema de Pitágoras debe su nombre a que...

   A) los pitagóricos plantearon su importancia.
   B) el matemático le puso ese nombre.
   C) la escuela pitagórica hizo su descubrimiento.
   D) los pitagóricos lo usaron primero.

2. ¿Cuál de las opciones no es una terna pitagórica?

   A) 12, 16, 20 **B)** 18, 24, 30 **C)** 3, 4, 5 **D)** 14, 48, 49

3. ¿Qué se entiende por terna pitagórica? ______________________

4. ¿Para qué se usó el teorema de Pitágoras en Mesopotamia y en el antiguo Egipto? ______________________

© SANTILLANA

La pirámide de Kefrén, denominada antiguamente la Gran Pirámide, fue diseñada con base en el Triángulo Sagrado Egipcio, un triángulo rectángulo cuya relación de los lados es 3-4-5.

Presentación del bloque

© SANTILLANA

Aprendizajes esperados:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

8 Ecuaciones cuadráticas por factorización

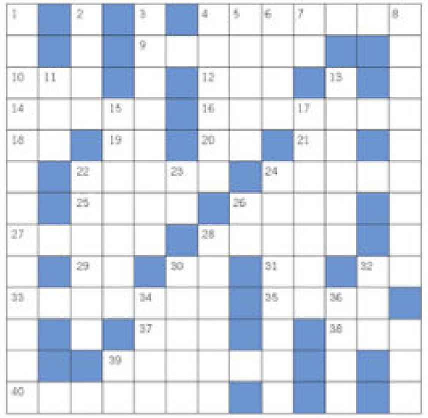
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Crucigrama matemático

1. Analicen en pareja el siguiente planteamiento y resuelvan.

Un grupo de estudiantes participa en un concurso para ganar dos pases dobles para asistir a un concierto. El concurso consiste en completar el siguiente crucigrama matemático.



a. Lean los enunciados y escriban las respuestas en el crucigrama.

Vertical

1. Cuando se tiene un trinomio cuadrado perfecto y este se expresa como la multiplicación de dos expresiones, se dice que se ha realizado una...

4. Es uno de los elementos que se encuentra en una multiplicación.

Horizontal

24. Dada la operación $(3 \times 2)(3 \times 4)$, se dice que ambos términos tienen un factor...

33. Un número elevado al cuadrado y sumado por sí mismo da como resultado 210, ¿cuál es ese número?

b. ¿Cómo determinaron el número de la pregunta 33 del crucigrama?

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si existen diferencias, discutan para acordar las respuestas correctas.

2. Retomen la pregunta 33 del crucigrama y resuelvan en el cuaderno.

a. Representen con una literal el número que se quiere encontrar.

- Representen la literal anterior elevada al cuadrado.

b. Escriban la suma de las expresiones anteriores igualadas a 210.

c. ¿Qué tipo de ecuación se forma?

d. Igualen a cero la expresión anterior.

e. ¿Qué valores puede adquirir x?

- La expresión anterior puede representarse como el producto de dos factores con un término común. Es decir, $(x - 14)(x + 15) = 0$

f. Analicen la expresión y establezcan qué relación tiene con los valores de x que encontraron.

› Socialicen sus argumentos y lleguen a acuerdos. Comenten acerca de los procedimientos empleados en la resolución de los problemas anteriores.

© SANTILLANA

¿Modelar con matemáticas?

3. Lean la información y resuelvan en equipo.

En las empresas que se dedican al desarrollo de materiales o productos, así como en las instituciones que realizan pronósticos económicos, demográficos, entre otros, las matemáticas sirven para hacer modelos y tomar decisiones. Algunos ejemplos son los siguientes:

Raúl trabaja en la industria automotriz, en el área de pintura para cajas de carga de las camionetas y camiones que vende la compañía.

a. Raúl debe pintar la parte lateral externa de la caja de un camión que tiene un área de 27 m^2. Sus medidas aparecen en la imagen.

- Escriban la fórmula para determinar el área de cualquier rectángulo: ______
- Sustituyan en la fórmula las expresiones algebraicas de la imagen para determinar el área del rectángulo de la caja del camión. ______
- ¿Cuál es el producto de la multiplicación anterior? ______
- A partir de la última expresión algebraica, ¿cuál es el valor de x? ______

b. Consideren el siguiente modelo que representa la caja de otro camión.

- Con base en la información, escriban la expresión algebraica que permite calcular el área del rectángulo: ______
- Si el área del rectángulo es igual a $2x^2$, escriban la expresión algebraica que representa su área: ______
- ¿Cuál es el valor de x? ______

› Describan su procedimiento, compárenlo con otros equipos y argumenten la veracidad del resultado y valídenlo con su profesor. Comenten si es posible representar las expresiones anteriores como el producto de dos factores con un término común.

© SANTILLANA

4. Reunidos en pareja, analicen la información y realicen lo que se indica.

Una manera de resolver problemas como los anteriores es mediante el uso de las propiedades de los números que han estudiado en grados anteriores, como la propiedad distributiva de la multiplicación.

La propiedad distributiva de la multiplicación establece que multiplicar una suma por un número es igual que multiplicar cada sumando por el número y después sumar todos los productos. Por ejemplo, la expresión $\boldsymbol{x}(8 + 9\boldsymbol{w} + \boldsymbol{y})$ se puede escribir como $8\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{xw} + \boldsymbol{xy}$.

Una manera de resolver una ecuación cuadrática es agrupar todos los miembros de un lado de esta, decimos que la expresión quedó **igualada a cero.** Por ejemplo, la expresión $w + 10 = -w^2 + 22$, al igualarla a cero tenemos: $w + 10 + w^2 - 22 = 0$. Se ordenan los términos, considerando el de grado mayor, y se simplifican los términos semejantes: $w^2 + w + 10 - 22 = w^2 + w - 12$.

a. Retomemos el problema del inciso b de la página anterior:

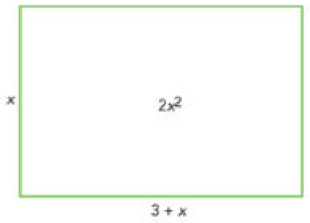
- ¿Qué significa la expresión algebraica $2x^2 = 2x + x^2$? ____
- Escriban la expresión anterior igualada a cero: ____ $= 0$
- Simplifiquen los términos semejantes: ____
- Escriban el término cuadrático como dos factores: ____
- Con base en lo anterior, ¿qué factor común tienen ambos términos? ____
- Factoricen el primer miembro o lado izquierdo de la ecuación: ____

b. Como podrán notar, el producto anterior es igual a cero, por lo que ambos factores se pueden igualar a cero. Igualen por separado ambos factores a cero.

- ¿Qué valor puede adquirir x en el primer factor para que el resultado sea 0? ____
- ¿Qué valor puede adquirir x en el segundo factor para que el resultado sea 0? ____

c. Verifiquen que dichos valores cumplen con la igualdad $2x^2 = 2x + x^2$.

- En el contexto del problema de la actividad anterior, ¿por qué $x = 0$ no puede ser la solución? ____



d. Supongamos que el largo del rectángulo de la caja del camión de la página anterior mide $3 + x$, el alto se mantiene como x, y el área es igual a $2x^2$, como se muestra en la ilustración de la izquierda.

- ¿Qué valores puede adquirir x? ____
- ¿Ambos valores pueden ser solución del problema? Argumenten su respuesta. ____
- Describan el procedimiento que siguieron. ____

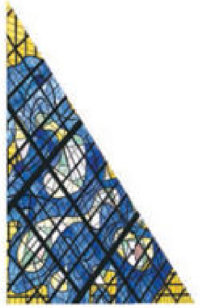
› Compartan su respuesta y su procedimiento con el resto del grupo. Registren en el cuaderno sus conclusiones.

© SANTILLANA

Solución de ecuaciones cuadráticas

5. Lean en equipo la información y resuelvan.

En una empresa se dedican a la construcción de grandes vitrales, como el modelo triangular que se muestra a la derecha. Para realizar este diseño, primero hacen un modelo como el de la figura verde, donde las medidas están dadas en centímetros.



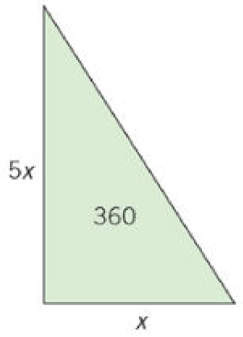
Vitral triangular, elaborado con vidrios de colores, ensamblados con varillas de plomo.

a. Escriban la fórmula para determinar el área de cualquier triángulo: ____

- Sustituyan las expresiones algebraicas en la fórmula para determinar el área del triángulo del modelo y determinen la expresión resultante: ____
- ¿Cuál o cuáles son valores de x? ____

b. Describan el procedimiento que siguieron para obtener la solución del problema. ____

› Comparen su procedimiento con el de otros equipos y argumenten la veracidad del resultado.



6. Analiza la información y responde.

Para resolver el problema anterior, un estudiante realizó el siguiente procedimiento:

- La expresión para determinar el área de un triángulo es: $A = \frac{bh}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)bh$.
- Al sustituir la fórmula en el problema, se tiene que: $360 = \left(\frac{1}{2}\right)(x)(5x)$.
- Se utilizan operaciones inversas y se obtiene: $720 = 5x^2$.

a. ¿Qué hizo para obtener $720 = 5x^2$? ____

- Utilizando operaciones inversas, la expresión $720 = 5x^2$ queda como $144 = x^2$.
- A partir de la expresión $144 = x^2$, son dos procedimientos los que se pueden seguir:

Primer procedimiento: De la expresión $144 = x^2$ se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros y esta queda como $\sqrt{144} = \sqrt{x^2}$.

- ¿Cuál es el valor de x? ____

Segundo procedimiento: La expresión $x^2 = 144$ se iguala a cero, y queda como $x^2 - 144 = 0$.

- Se factoriza el miembro del lado izquierdo: $(x - 12)(x + 12) = 0$.
- Cada factor se iguala con cero y se obtiene: $(x + 12) = 0$; $(x - 12) = 0$.

b. ¿Por qué en cada factor hay signos opuestos? ____

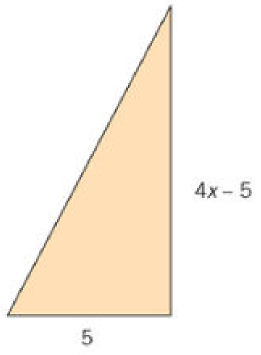
c. ¿Los valores obtenidos para x pueden ser solución del problema? Justifica tu respuesta. ____

› Comenta con el grupo las diferencias entre estos procedimientos y los que tú empleaste. Con ayuda del profesor, discútanlo y registren sus acuerdos.

© SANTILLANA

Método de factorización

7. En pareja lean el planteamiento, analicen la figura y resuelvan en su cuaderno.



a. La figura de la izquierda tiene un área de $2x^2$. Con base en la información que se proporciona, respondan las preguntas.

- ¿Cuál es la **igualdad** que relaciona las expresiones algebraicas del modelo?
- ¿Cuál es el valor de x?
- Si en la igualdad escrita antes, multiplican ambos miembros de la igualdad por 2, ¿qué resultado obtienen?
- De la última expresión, ¿conviene utilizar la propiedad de dividir ambos miembros de la igualdad entre 5? Argumenten su respuesta.

b. Si en la igualdad $4x^2 = (5)(4x - 5)$ se obtiene el producto del miembro del lado derecho, ¿cuál es el resultado?

- Si ahora la expresión se iguala a cero, se obtiene un trinomio del lado izquierdo, ¿cuál es dicha expresión?
- Si el trinomio se escribe como el producto de dos factores, ¿cuántos términos tiene cada factor?
- Si se obtiene la raíz cuadrada del término cuadrático, ¿cuál es el resultado?
- Si se obtiene la raíz cuadrada del término independiente, ¿cuál es el resultado?
- ¿Qué relación tienen los resultados anteriores con los factores del producto para obtener el trinomio?
- ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones corresponde al trinomio $4x^2 - 20x + 25$? Justifiquen su respuesta.

• $(2x + 5)(2x + 5)$ • $(2x + 5)(2x - 5)$ • $(2x - 5)(2x - 5)$

c. A partir de la expresión que seleccionaron, igualen con cero cada factor.

- ¿Cuál o cuáles valores puede adquirir x? ____________________

d. Comparen el resultado anterior con el que obtuvieron en el inciso a, ¿el resultado es el mismo? Justifiquen y con ayuda de su profesor elaboren conclusiones.

e. Después encuentren las soluciones de estas ecuaciones.

• $3x^2 + 8x - 9 = 2x$	x_1 = ______	x_2 = ______
• $108a + 6a^2 = 15a^2$	a_1 = ______	a_2 = ______
• $196x^2 + 196x = 200x^2$	x_1 = ______	x_2 = ______
• $24p^2 - 12p = 24p - 12p^2$	p_1 = ______	p_2 = ______
• $-15x^2 - 40x = -20x^2 - 8x$	x_1 = ______	x_2 = ______
• $y^2 = -45 + 14y$	y_1 = ______	y_2 = ______

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y en grupo validen los métodos de resolución. Después, lean la siguiente información y discutan las ideas centrales.

Glosario

igualdad. Es la relación de dos expresiones matemáticas que tienen el mismo valor y están relacionadas con el signo igual.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Las **expresiones algebraicas** como las que han trabajado en la lección se conocen como **cuadráticas** o de **segundo grado**, y se pueden resolver utilizando la **factorización**, como viste en el ejemplo anterior. Este método se utiliza cuando otros recursos, como el cálculo mental o las operaciones inversas, no son los más pertinentes.

Al igualar a cero los términos de un polinomio o una ecuación de segundo grado, esta se puede factorizar. Después, cada factor se iguala a cero y, a partir de ello, se obtienen las soluciones de la ecuación, por ejemplo:

- Cuando los términos de un polinomio o ecuación de segundo grado tienen un **factor común**. En este caso, $3x^2 - 3x$ se puede factorizar como: $3x(x - 1)$
- Cuando tenemos un **trinomio cuadrado** perfecto, se deben cumplir las siguientes condiciones, usando la expresión general $ax^2 + bx + c$, a y c: deben tener raíz cuadrada exacta y b tiene que ser igual al producto de las raíces de a y c multiplicado por 2. Aquí los factores pueden ser de suma o resta, como se muestra a continuación:

  De suma: $x^2 + 4x + 4 = 0$ queda como $(x + 2)(x + 2)$; de resta: $x^2 - 4x + 4$ queda como $(x - 2)(x - 2)$.

Cuando se tiene una **diferencia de cuadrados**, ambos términos deben tener raíz cuadrada exacta, y el binomio en cada factor debe tener signos opuestos, por ejemplo: $4x^2 - 16$, factorizado queda: $(2x + 4)(2x - 4)$.

8. Factoricen las ecuaciones y verifiquen las soluciones con un modelo geométrico.

a. $49 - a^2$	b. $x^2 - 2xy + y^2$
c. $x^2 + 2xy + y^2$	d. $9m^2 - 24m + 16$
e. $81g^2 + 54g + 9$	f. $64k^2 - 100$
g. $w^2 - 10w + 21$	h. $9c^2 + 21c + 10$

› Socialicen sus respuestas y, con la ayuda de su profesor, elaboren enunciados que indiquen los pasos a seguir para factorizar los casos g y h.

› Seleccionen una de las ecuaciones anteriores y planteen, en su cuaderno, un problema que se pueda resolver con ella.

Reto Física y ecuaciones cuadráticas

1. Analiza la información y resuelve el problema.

Calcula el tiempo que tardaría en caer un objeto que se lanza hacia arriba a una velocidad inicial de 400 pies (ft) por segundo. La expresión que modela dicha situación es:

$h = -16t^2 + v_0t$, donde h es la altura, t el tiempo y v_0 es la velocidad inicial.

a. ¿En qué tiempo regresaría el objeto al piso? Considera que $h = 0$ y $v_0 = 400$ ft/s

____

b. Si después de un tiempo el objeto recorre una altura de 2 400 pies, ¿qué tiempo tarda en llegar a esa altura? Considera que $h = 2\,400$ ____________________

› Comparte tus experiencias en clase, y si hay dudas, pide apoyo al profesor.

Apoyo tecnológico

En el interactivo "Baldosas algebraicas" del siguiente sitio podrás practicar:

nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_189_g_2_t_2.html?open=actiities&from=topic_t_2.html

Del lado derecho de la pantalla aparecen algunas preguntas que se relacionan con lo que solicita el interactivo.

Conforme obtengas las respuestas, pasa a la siguiente pregunta. Respóndelas todas.

Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

9

Rotación y traslación

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

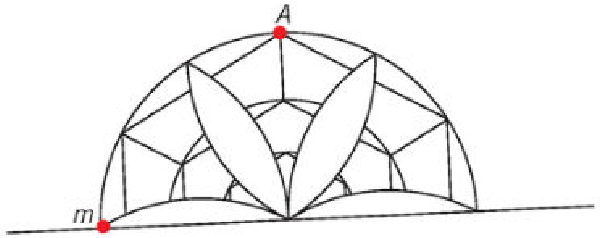
Contenido: Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Simetría axial, análisis de sus propiedades

1. Analiza la situación y realiza lo que se solicita.

Kabindú es maestro de yoga y eligió, como logotipo de su escuela, un mandala de forma circular. Él afirma que para trazar el logotipo se deben aplicar las propiedades de la simetría axial.

a. Completa el mandala. Considera que es simétrico respecto a la recta m.
b. Localiza el vértice simétrico de A y nómbralo A'.
c. Traza un segmento de recta que una los puntos A y A'.



- ¿Cómo es el segmento que une los puntos A y A' respecto al eje de simetría? ______
- Mide la distancia del punto A y del punto A' al punto m. ¿Cómo son A y A' con respecto de m? ______
- Elige un ángulo de la figura original y localiza su correspondiente. ¿Cómo son los ángulos entre sí? ______
- Justifica por qué el mandala cumple con las propiedades de la simetría axial. ______

› Comenta con tus compañeros el procedimiento que seguiste para completar el mandala. En grupo socialicen sus argumentos con base en la geometría y lleguen a acuerdos.

© SANTILLANA

d. En grupo, completen las siguientes afirmaciones.

En cualquier construcción de simetría axial...

- la medida de los lados de la figura original ______ que la medida de los lados de la figura simétrica.
- La medida de los ángulos de la figura original ______ que la medida de los ángulos de su simétrico.
- Para trazar el simétrico de una figura original es suficiente trazar el simétrico de cada ______ porque ______

› Validen sus resultados con la ayuda de su profesor.

Traslación de figuras regulares e irregulares

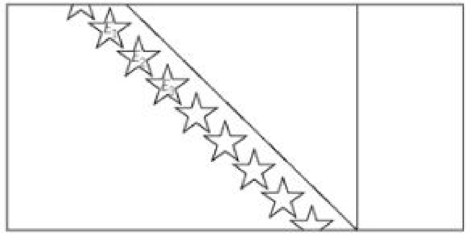
2. Analiza los trazos y responde en el cuaderno.

En una clase de matemáticas, la maestra pidió a sus alumnos reproducir las siguientes banderas:

Bandera de la Unión Europea

Bandera de Bosnia y Herzegovina

Héctor, uno de sus alumnos, trazó la bandera de Bosnia y Herzegovina.



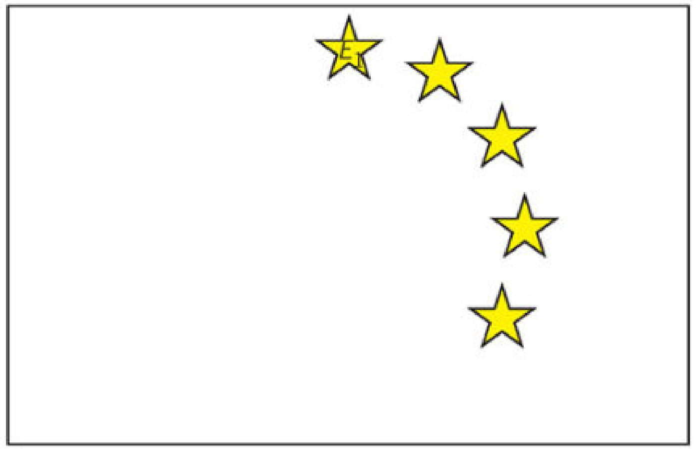
a. Verifica que todas las estrellas sean iguales.
b. Considera únicamente las estrellas completas; ubica la estrella que ocupa la posición 7 y llámala $\mathcal{E}_7$. Traza un segmento que una los vértices correspondientes de $\mathcal{E}_7$ con los de $\mathcal{E}_1$.

- ¿Cómo son los segmentos que unen los vértices de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_7$?
- ¿Cómo es la distancia entre los vértices de $\mathcal{E}_1$ y los correspondientes de $\mathcal{E}_7$?
- ¿Qué sucede con el segmento que trazaste y los vertices de las otras estrellas?
- ¿$\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_7$? ¿Entonces $\mathcal{E}_2 \cong \mathcal{E}_7$? Explica.
- ¿Qué propiedades conservaron las estrellas?
- Al analizar las construcciones, un estudiante afirmó que las estrellas "se trasladan". ¿A qué se refiere con "trasladar"?

› Comenta con tus compañeros y profesor los procedimientos que seguiste para trazar las estrellas. Discutan qué entienden por "traslación".

© SANTILLANA

3. Completa la bandera de la Unión Europea y responde.



a. Describe el procedimiento que seguiste para trazar las estrellas. ________________

____

____

b. Elige la estrella $\mathcal{E}_1$; y etiqueta sus vértices como *A, B, C, D, E*.

- Ubica la estrella que se encuentra inmediatamente a la derecha de $\mathcal{E}_1$ y nómbrala $\mathcal{E}_2$. Etiqueta los vértices de $\mathcal{E}_2$, como *A', B', C', D', E'*.
- Une los vértices *A* y *A'*. Haz lo mismo con los vértices *B, B'; C, C'; D, D'* y *E, E'*.
- Registra la longitud de los siguientes segmentos:

$\overline{AA'}$: ______ $\overline{BB'}$: ______ $\overline{CC'}$: ______ $\overline{DD'}$: ______ $\overline{EE'}$: ______

- Prolonga los segmentos *AA'* y *BB'*. ¿Cómo son entre sí los segmentos que se forman?

____

c. Traza y mide los segmentos *AB* y *A'B'*, ¿cómo son entre sí las medidas obtenidas? ______

- Mide todos los lados de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$. Identifica los lados correspondientes y compara las mediciones obtenidas. ¿Qué relación puedes establecer entre la medida de los lados?

____

- ¿Es posible generalizar esta relación para las demás estrellas? ¿Por qué? ________

____

d. Prolonga los segmentos *AB* y *A'B'*; *CD* y *C'D'*.

- ¿Cómo son entre sí las rectas que se construyen en cada caso? ____________
- ¿Qué relación puedes establecer de lo analizado? ____________

____

- ¿Esta relación se puede generalizar para las demás estrellas? ¿Por qué? ________

____

© SANTILLANA

- Mide los ángulos internos de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$. ¿Cómo son los ángulos de ambas figuras? ______

____

- ¿Qué puedes concluir a partir de las mediciones realizadas? ____________

____

› Socializa tus respuestas y, con ayuda de tu profesor, redacta una conclusión acerca de las propiedades que estudiaron.

e. Al trazar las estrellas de las banderas, tanto de la Unión Europea como de Bosnia y Herzegovina, aplicaste la **traslación**. Analiza las conclusiones a las que llegaste en las actividades anteriores y escribe tres propiedades de la traslación.

- ____
- ____
- ____

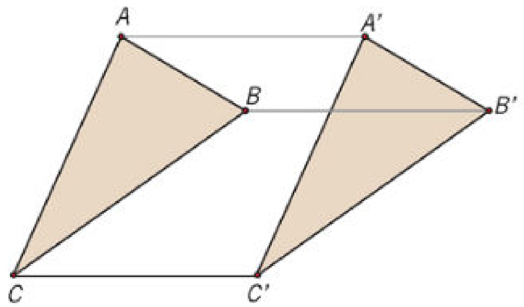
› Socializa tus respuestas en grupo y, junto con su profesor, redacten los criterios que determinan que una figura sea traslación de otra.

4. **Investiguen en un medio impreso o electrónico las propiedades de la traslación.**

- Analicen la información obtenida y compárenla con las propiedades que enunciaron anteriormente y con el siguiente texto.

Una figura es traslación de otra cuando:

- Todos los vértices y lados de esta se desplazan en una misma dirección; es decir, en una trayectoria recta.
- Conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.
- Los segmentos que unen los vértices correspondientes de ambas figuras son paralelos.
- Conserva la misma orientación.
- Los lados correspondientes de la figura original y de la figura que se trasladó son paralelos.



› Analicen el ejemplo anterior y argumenten, con base en la información proporcionada, por qué los trazos que realizaron son traslaciones.

© SANTILLANA

Transformaciones en el plano: rotación

5. **Analiza los trazos y responde.**

Osiris construye un rehilete como el que se muestra a partir de los siguientes triángulos.

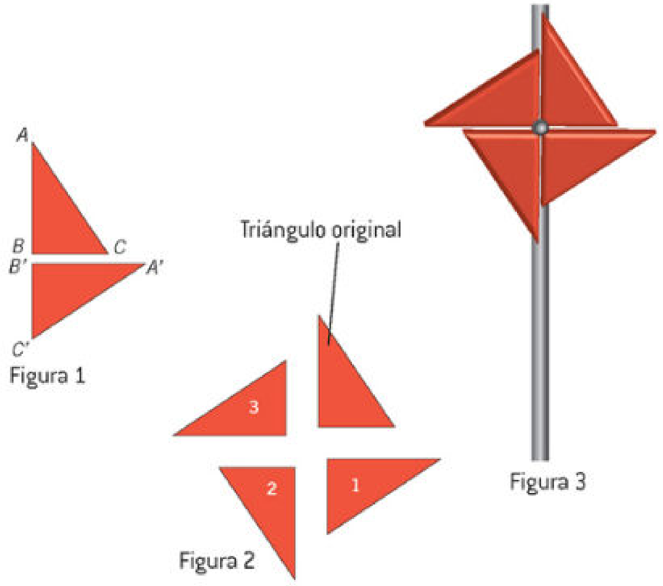


Figura 1
Figura 2
Figura 3

a. Compara los triángulos *ABC* y *A'B'C'* y enuncia qué propiedades geométricas los caracterizan. ______

b. ¿Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son simétricos? Explica con argumentos geométricos. ______

c. Considera al triángulo *ABC* como la figura original. El triángulo *A'B'C'*, se obtuvo al girar el triángulo *ABC* con base en un punto y en un ángulo. Osiris giró 90° a la derecha el vértice *A* del triángulo original, y obtuvo el vértice *A'*. ¿Cuánto giró, y en qué dirección, los vértices *B* y *C* para obtener *B'* y *C'*? ______

d. Para trazar el triángulo 2, de la figura 2, ¿cuántos grados y hacia dónde debe girar Osiris los vértices *A*, *B* y *C*? ¿Por qué? ______

e. ¿Cuánto debe girar y en qué dirección para construir el triángulo 3? ______

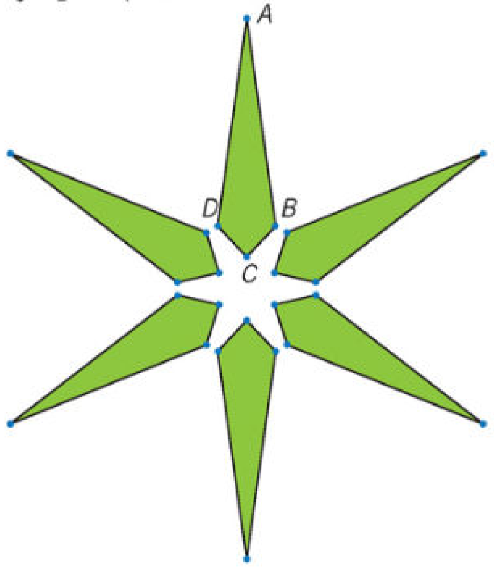
f. ¿Cuántos grados debe girar el triángulo original para quedar en la misma posición? Justifica tu respuesta. ______

› Comparte tus respuestas con el grupo y valídalas con el profesor.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

6. **En pareja, analicen la figura y hagan lo que se solicita.**



- Observen el cuadrilátero en el que se muestran los vértices *A*, *B*, *C* y *D*, identifiquen los vértices correspondientes en alguno de los otros cuadriláteros y nómbrenlos como *A'*, *B'*, *C'* y *D'*.
- Unan los puntos de *C* con *C'* y *D* con *D'*.
- Determinen la mediatriz de los segmentos *CC'* y *DD'*.
- Prolonguen las **mediatrices** de los segmentos anteriores hasta que se intersequen.
- Denominen el punto de intersección como *O*.

a. Obtengan la medida de los siguientes ángulos:

- $\angle COC'$: ______
- $\angle DOD'$: ______
- ¿Los segmentos *AD* y *A'D'* son congruentes? Argumenten. ______
- ¿Los lados correspondientes del cuadrilátero *ABCD* son congruentes al cuadrilátero *A'B'C'D'*? Sustenten con base en la geometría. ______
- ¿Cómo es la medida de los ángulos correspondientes del cuadrilátero *ABCD* y *A'B'C'D'*? ______

b. Para trazar los triángulos que forman el rehilete y los cuadriláteros que forman la estrella, se aplicó una rotación. Analicen nuevamente las figuras y establezcan qué criterios determinan que una figura sea rotación de otra. ______

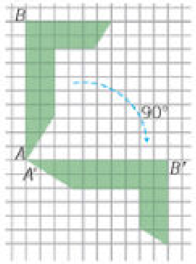
› Comenten con sus compañeros las respuestas y los criterios que establecieron. Valídenlos con ayuda de su profesor.

Glosario

mediatriz. La mediatriz de un segmento de recta es la recta perpendicular que pasa por su punto medio.

7. **Investiguen en un medio impreso o electrónico las propiedades de la rotación y sus diferencias con la traslación y la simetría axial.**

a. Analicen la información obtenida y compárenla con sus conclusiones y con el siguiente texto.



Rotar una figura significa moverla a la derecha o a la izquierda respecto de un punto específico o **centro de rotación** dado el valor del **ángulo de giro**. En el caso de la estrella de la página anterior, el punto *O* que encontraron representa el centro de rotación.

Una figura es rotación de otra si los vértices de las dos se encuentran a la misma distancia del centro de rotación y si cada uno de los ángulos que se forman al unir dos vértices correspondientes con el punto *O* miden lo mismo que el ángulo de rotación. El ángulo que forman ambos con el centro de rotación es siempre el mismo, como se observa en la imagen.

- Cuando la rotación es de 180°, la figura que se obtiene cumple con las condiciones de **simetría central**.

Glosario

simetría central. Es una transformación que se da respecto de un punto o centro de simetría y que debe cumplir con las siguientes condiciones:
a) Un punto *P* y su simétrico *P'* deben estar a igual distancia del centro de simetría.
b) El punto *P*, su simétrico *P'* y el centro de simetría pertenecen a una misma recta.
Por tanto, al aplicar la simetría central se obtiene la misma figura con una rotación de 180°.

- Con base en lo anterior validen si el rehilete y la estrella cumplen con las propiedades de la rotación.

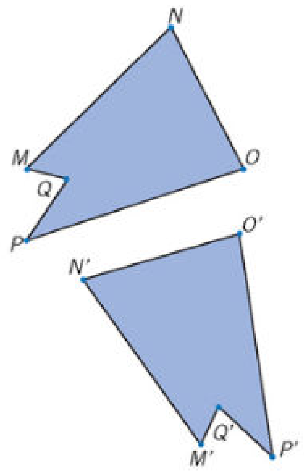
b. En pareja, tracen en su cuaderno un ejemplo en el que se aplique la rotación. Expónganlo al resto del grupo y valídenlo con argumentos geométricos.

› Socialicen sus respuestas y acuerden sobre los criterios que determinan que dos figuras tengan rotación.

El centro de rotación de una figura

8. **En pareja, hagan lo que se indica y respondan.**

a. Determinen el centro de rotación de las figuras, llámenlo *C*.
- Utilicen el procedimiento empleado en la estrella de la página anterior.



© SANTILLANA

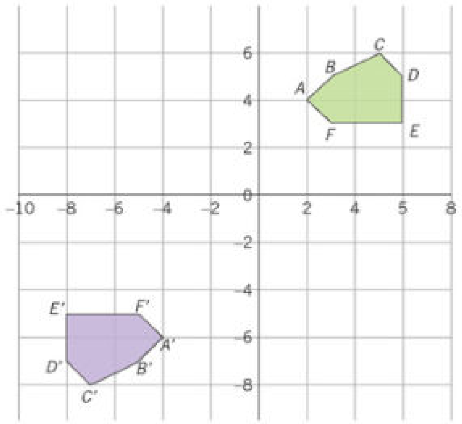
© SANTILLANA

- Determinen la medida del ángulo de rotación. ______
- ¿Qué características tienen dos o más figuras al ser rotadas *n* grados, independientemente de la dirección del giro? ______
- ¿Estas condiciones se pueden generalizar para todo tipo de forma geométrica? Justifiquen su respuesta. ______

› Comenten sus respuestas y registren sus conclusiones, valídenlas con ayuda de su profesor.

b. Determinen el centro de rotación de las figuras del plano cartesiano y llámenlo *O*.

- Tracen una figura con el mismo centro de rotación, cuyo vértice A'' esté sobre la coordenada (2, –4).
- ¿Cuánto mide el ángulo de rotación? ______
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto *O*? ______



› Socialicen sus resultados y valídenlos con su profesor.

› En su cuaderno, hagan una construcción geométrica como las que hicieron en la lección. Planteen preguntas a sus compañeros acerca de qué movimiento aplicaron y pidan que los argumenten.

Reto La posición inicial

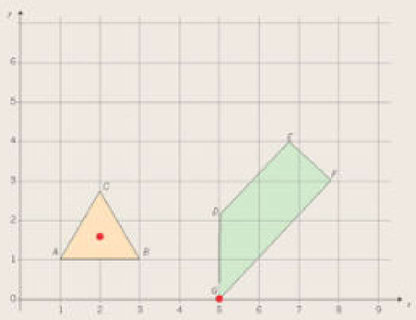
1. **Analiza las figuras y resuelve. Justifica tus respuestas.**

En cada figura el punto rojo representa el centro de rotación.

a. Si el triángulo tiene un ángulo de rotación de 120° a la derecha, ¿en qué coordenada se ubica el vértice C?

b. Si al girar a la derecha el cuadrilátero el vértice F se ubica en la coordenada (9, 1), ¿cuál es el ángulo de rotación que se aplicó?

› Socialicen en grupo sus argumentos y con ayuda del profesor lleguen a conclusiones.



Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio:
http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349687544
encontrarás información sobre simetría rotacional. Realiza las actividades y después discute con tus compañeros tus experiencias al manipular el interactivo. (consulta: 28 de diciembre de 2016)

10 Simetría axial, rotación y traslación

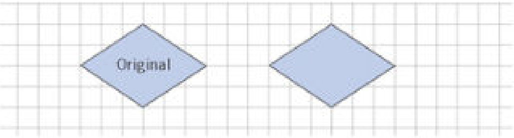
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

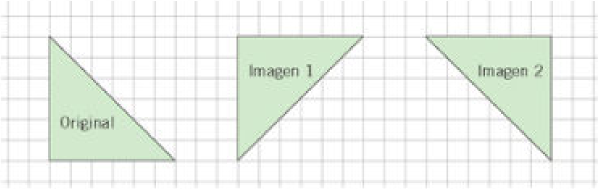
Simetría

1. **Realiza lo que se solicita.**

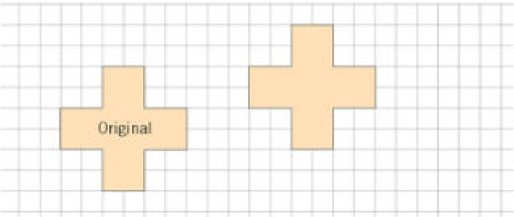
   a. Analiza cada caso y escribe el procedimiento que se siguió para hacer las construcciones. Argumenta tu respuesta.



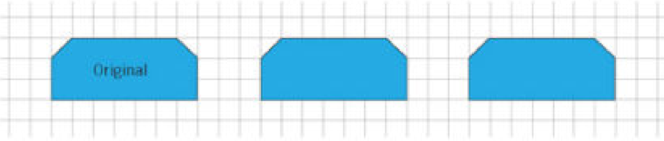
Caso 1



Caso 3



Caso 2



Caso 4

Construcciones	Procedimiento
Caso 1	
Caso 2	
Caso 3	
Caso 4	

   b. Analiza el caso en el que se aplicó la rotación y responde.

   - ¿En qué sentido o dirección giró? ____________
   - ¿Cuál es la medida del ángulo de rotación? ____________

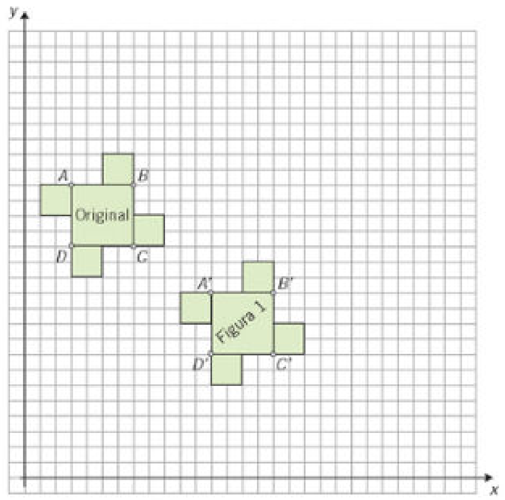
   c. Retoma el caso 2 y traza la tercera cruz. Describe el procedimiento que seguiste. ____________

› Compara tus respuestas con tus compañeros, arguméntalas geométricamente y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

2. **Analiza las figuras y haz lo que se solicita .**

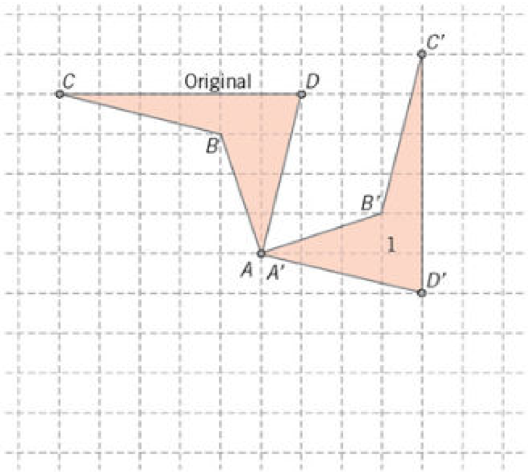


   a. Completa la tabla con las coordenadas de los cuadrados *ABCD* y *A' B' C' D'*.

Coordenadas							
Figura original							
A	*B*	*C*	*D*	*A'*	*B'*	*C'*	*D'*
(3, 19)							

   - En la retícula, traza otro cuadrado cuyas coordenadas del punto *A"* sean (21, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos *B"*, *C"* y *D"*. ____________
   - ¿Qué procedimiento se siguió para obtener las tres figuras? Valida tus respuestas con argumentos geométricos. ____________

3. **Analiza la construcción, aplica el mismo ángulo de rotación y traza las figuras 2 y 3.**



   a. ¿Cuál es la medida del ángulo de rotación de la figura original con respecto de la figura 2? ____________

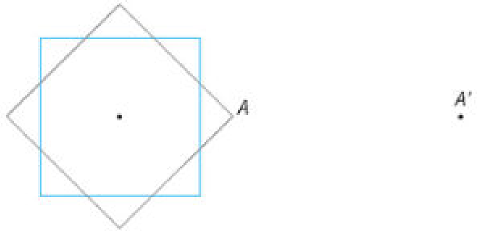
   b. ¿Y con respecto de la figura 3? ____________

› Socialicen los procedimientos empleados en la construcción de figuras que se trasladan y que se rotan.

Combinación de simetrías

4. Haz los trazos que se indican. Después valida tus construcciones.

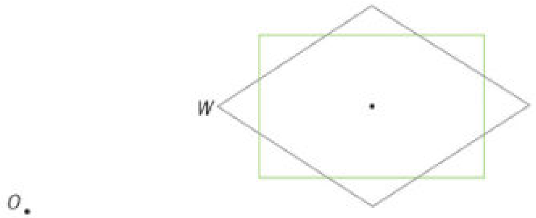
a. Traslada la figura con base en el punto A'.



- ¿Qué instrucciones darías a otro compañero para que traslade la figura original de manera sucesiva? ______________________________
- Utiliza la información anterior y construye en tu cuaderno la figura original y cinco traslaciones. ¿Algunos puntos de las figuras quedan en la misma ubicación después de trasladarlas? Explica. ______________________________
- Completa la siguiente idea: Una traslación hace coincidir dos puntos X y Y cualesquiera de una figura con los puntos X' y Y' de la figura trasladada de manera que: ______________________________

› En pareja, intercambien las instrucciones que escribieron y hagan los trazos. Comenten si las instrucciones que recibieron fueron suficientes. Corrijan si lo consideran necesario.

b. Rota la figura con respecto al punto O y con giro a la derecha de 120°.



- Analiza la siguiente afirmación y valida su veracidad.
  "Las rotaciones son giros alrededor de un punto, según un sentido dado".
- ¿Cuál es la relación de una figura y su imagen resultante al rotarse? ______________
- En el cuaderno dibuja la figura original, rótala con un ángulo de 180° hacia la derecha sobre el vértice W, ¿qué figura se obtiene? ______________________________

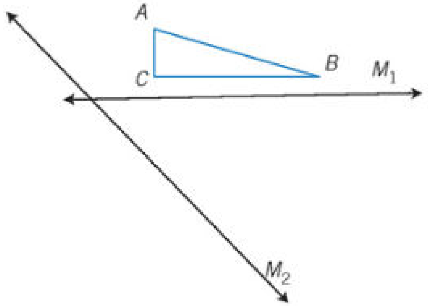
› Compara tus figuras con las de tus compañeros. Explica el procedimiento que seguiste para trazarlas.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. La reflexión es una simetría en la cual todos los puntos se reflejan con respecto de una recta que actúa como espejo.

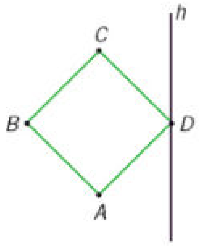
- Refleja el triángulo ABC sobre la recta M_1. Luego refleja la figura obtenida sobre la recta M_2.



- Escribe el procedimiento que seguirías para trazar la segunda figura a partir de la figura original. ______________________________
- Construye una conjetura sobre el resultado de reflejar una figura sobre dos rectas secantes y demuéstrala con un ejemplo. ______________________________
- ¿Qué sucede si reflejas una figura sobre una recta y luego reflejas la imagen sobre otra recta que es paralela a la primera? Para sustentar tu respuesta, haz los trazos en tu cuaderno y escribe tus conclusiones. ______________________________

5. En pareja, realicen los trazos y respondan.

a. Tracen el simétrico del cuadrado $ABCD$ con respecto del eje de simetría h. Nombren los vértices de la figura simétrica como $A'B'C'D'$.



b. Tracen el cuadrado $A'B'C'D'$ rotado, con ángulo de rotación de 90° respecto del punto D. Nombren los vértices de la figura como $A''B''C''D''$.

c. Tracen el simétrico de la figura $A''B''C''D''$, apliquen la traslación respecto del punto D''. ¿Qué figura se formó? Expliquen. ______________________________

- Al considerar como patrón las simetrías anteriores, ¿se puede construir un teselado? ¿Por qué? ______________________________

› Hagan una construcción en la que combinen dos tipos de simetría y preséntenla al grupo.

Mosaicos simétricos

6. De manera individual, realiza lo que se pide.

a. Sigue los pasos y traza lo que se indica.

- Ubica en la recta dos puntos, llámalos *Z* y *W*.
- Ubica un punto *Y* de manera que puedas construir el triángulo rectángulo *YZW*.
- Traza su simétrico con respecto de *m*.
- Traslada la figura resultante cinco veces, sobre la recta *m*.

- ¿Se puede afirmar que tu construcción es un mosaico simétrico? Explica. ______________________
- Propón otros polígonos y aplica en tu cuaderno el patrón simétrico.

b. Dado el segmento *BA*, construye un triángulo rectángulo *ABC*. Rota la figura 180° con respecto del punto *A*.

- Traslada sobre *m* cinco veces la figura que obtuviste.

- Compara tus trazos con los de tus compañeros. ¿Son iguales? Expliquen a qué se debe esto.

› Retomen las instrucciones del inciso b, pero ahora consideren como figura original un triángulo equilátero o un triángulo isósceles. Muestren su construcción al grupo.

c. Construye, dado el segmento *PQ*, un triángulo rectángulo *PQR*, y aplica la simetría axial vertical y traza su simétrico de manera que el punto *Q'* coincida con el punto *Q*.

- Aplica simetría axial horizontal a la figura obtenida.
- Repite este patrón cinco veces.

- Aplica las simetrías axial vertical y axial horizontal a otras figuras regulares y crea mosaicos simétricos. Compara tus propuestas en clase.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

d. Traza un triángulo rectángulo *ABC*. Aplica la simetría central de manera que el centro de simetría quede sobre el vértice del ángulo recto.

Traslada la figura obtenida, de manera que no dejes espacios entre estas. Repite este patrón cinco veces.

- Compara tu construcción con las de tus compañeros y valídala con argumentos geométricos.

e. Analiza el mosaico y escribe el procedimiento que debe seguirse para construirlo.

Mosaico

Procedimiento

____

____

____

____

____

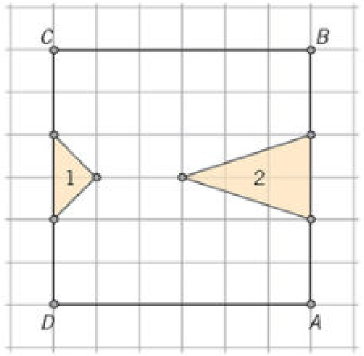
____

› Comenta con tus compañeros el procedimiento que propusiste. Si es necesario, corrígelo o amplíalo.

7. En equipo, hagan los trazos y respondan.

- En su cuaderno, tracen mosaicos geométricos con polígonos regulares que no hayan sido considerados en el grupo.
- Definan las condiciones mínimas para construir un mosaico simétrico mediante la combinación de las simetrías estudiadas.
- Socialicen su definición y valídenla en grupo.

8. En una hoja cuadriculada, construye el cuadrado *ABCD*. Además traza los triángulos 1 y 2, como se muestra en la imagen.



- Rota el triángulo 1 con respecto del punto *D*, con giro a la izquierda y con ángulo de rotación de 270°.
- Rota el triángulo 2 con respecto del punto *B*, con giro a la izquierda y con ángulo de rotación de 270°.

› Reúnete con cinco compañeros y usen su figura como patrón para construir un mosaico. Muestren al resto del grupo el patrón que formaron. Describan su experiencia.

9. Construye en tu cuaderno un patrón simétrico con figuras irregulares. Aplica el tipo de simetría que se indica en cada caso.

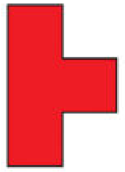
- Simetría axial horizontal y vertical
- Simetría axial y una traslación
- Simetría central y una rotación
- Traslación seguida de una simetría horizontal que dé como resultado una simetría axial vertical.

› Muestren sus mosaicos al resto del grupo y valídenlos. Después registren sus acuerdos. Si hay dudas, coméntenlas en clase con la finalidad de solucionarlas.

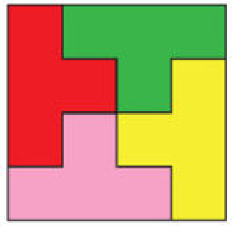
Descripción de mosaicos simétricos

10. Analiza el mosaico y realiza lo que se indica.

Figura original



Mosaico



- Describe qué tipo de simetría se aplicó a la figura original para construir el mosaico. ______

11. Analiza cada mosaico y escribe el procedimiento que debe seguirse para trazarlo.

 Elemento básico de diseño o figura básica

Figura 1

Figura 2

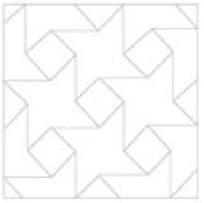


Figura 3

- Elige dos mosaicos y, siguiendo tu procedimiento, reprodúcelos en tu cuaderno.

› Expón tus trazos y explica el procedimiento que seguiste para hacerlos. Explica qué simetría se aplicó en cada caso. Valida tus procedimientos con ayuda del profesor.

© SANTILLANA

Algunas conclusiones

12. Reúnete con un compañero y, con base en las exploraciones anteriores, concluyan.

a. ¿Qué características debe tener un mosaico si en su diseño se aplicó lo siguiente?
- Reflexión. ______
- Rotación. ______
- Traslación. ______

b. ¿Encontraron mosaicos que combinen distintos tipos de movimientos? Si es así, descríbanlos y argumenten sus respuestas. ______

› Comenten sus respuestas con sus compañeros y valídenlas con ayuda del profesor.

Reto Mosaicos

1. En pareja, completen la tabla. Describan el procedimiento que seguirían para crear un diseño con los movimientos indicados y trácenlo.

Movimientos aplicados	Procedimiento	Diseño
Reflexión vertical, reflexión horizontal y traslación		
Rotación y simetría central		
Traslación más simetría central y simetría axial		

› Intercambien su trabajo con otros compañeros, sigan los procedimientos que indicaron y hagan los trazos. En grupo, analicen si se proporcionó la información suficiente. Complétenla si fuera necesario.

2. En su cuaderno, elaboren un diseño que combine la simetría axial central, la traslación y rotación de figuras. Muestren el diseño a sus compañeros, destaquen la figura base, y pregúntenles qué movimientos hicieron.

› Validen su trabajo con ayuda del profesor.

Apoyo tecnológico

En los siguientes sitios podrás manipular virtualmente objetos geométricos para practicar lo estudiado:

Simetría axial
nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_298_g_4_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html

Rotación
nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_207_g_1_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html

Traslación
nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_301_g_3_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html

Comparte en clase tus experiencias al manipular los interactivos. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

11

Cuadrados y triángulo rectángulo

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

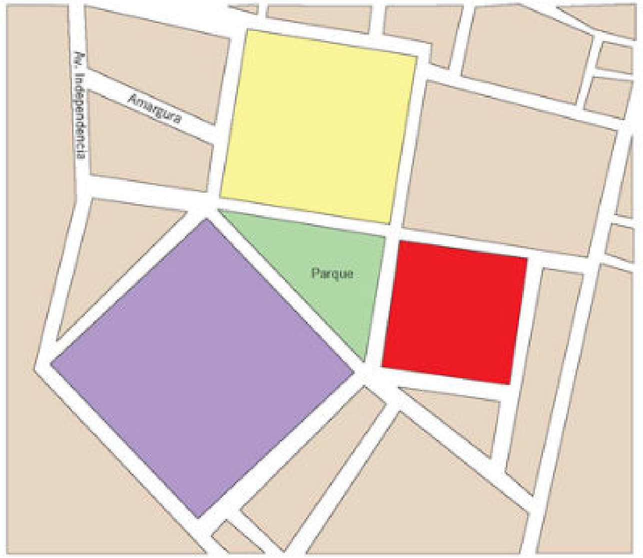
¿Cuál es la mejor opción?

1. **En equipo, lean la información y contesten lo que se solicita.**

Ana comprará un terreno para construir su casa y establecer un negocio familiar. Pedro tiene a la venta tres terrenos que se encuentran a los lados de un parque que tiene forma de triángulo rectángulo. Con base en las necesidades de Ana, Pedro le ofrece dos opciones:

- Opción 1. Dos terrenos, cada uno con forma cuadrada. La medida de los lados de los terrenos es la misma que la medida de los lados más cortos del parque.
- Opción 2. Un terreno cuadrado cuya medida del lado corresponde con el lado más largo del parque.

La imagen muestra la disposición de los terrenos que Pedro le ofrece a Ana.



a. Pedro dice que el área de los dos terrenos de la opción 1 es la misma que la del terreno de la opción 2.

- Escribe en las figuras los números que corresponden con las opciones expuestas por Pedro.

© SANTILLANA

- Si Ana solicitara su punto de vista, ¿cuál de las dos opciones le recomendarían? ¿Por qué? ______
- Analicen la veracidad de la información que proporcionó Pedro. Escriban una conjetura que les permita validarla. ______

› Socialicen sus respuestas y sus conjeturas. Entre todos lleguen a acuerdos y, si hay dudas, aclárenlas en colectivo.

2. **Realicen lo que se solicita.**

a. Verifiquen que las áreas de los terrenos de la opción 1 corresponden al área del terreno de la opción 2.

- Describan el procedimiento que siguieron para validar su conjetura y comparen sus resultados con el resto del grupo. ______

› Analicen al menos tres conjeturas de otros equipos. Registren en su cuaderno sus acuerdos sobre la relación que se da entre las áreas de los cuadrados que se forman y los lados de un triángulo.

b. Calquen los cuadrados que modelan los terrenos y etiqueten como *AC*1 al de menor área, *AC*3 al de mayor área y *AC*2 al mediano.

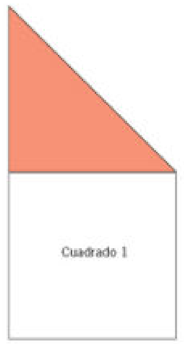
- Verifiquen que la medida de sus lados corresponde a las medidas de los lados del triángulo.
- Tracen la diagonal del cuadrado *AC*1, a partir del vértice inferior izquierdo.
- Tracen la diagonal del cuadrado *AC*2, siguiendo el procedimiento anterior.
- Sobre los otros dos vértices de cada cuadrado, tracen segmentos paralelos a la hipotenusa del terreno del parque hasta el punto donde intersequen a la diagonal. De manera que cada cuadrado quede divido en cuatro partes.
- ¿Cómo son entre sí las figuras que se obtienen al trazar las diagonales en cada cuadrado? Justifiquen. ______
- Recorten las figuras obtenidas en los cuadrados *AC*1 y *AC*2 y cubran con estas el área del cuadrado *AC*3. ¿Se pudo cubrir el área? ¿Por qué? ______
- Escriban una expresión matemática y un enunciado que relacione el área de los tres cuadrados:
- Expresión matemática: ______
- Enunciado: ______

› Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Argumenten y lleguen a una conclusión.

© SANTILLANA

3. **Reúnanse en pareja y sigan el procedimiento dado.**

Un alumno de tercero de secundaria hizo el siguiente trazo para verificar lo que dice Pedro y aplicó el procedimiento de la actividad 2.



- Tracen un cuadrado sobre el otro cateto y nómbrenlo cuadrado 2.
- Tracen un cuadrado sobre la hipotenusa y llámenlo cuadrado 3.
- Sigan el procedimiento dado en la actividad 2 y superpongan las figuras resultantes en el cuadrado 3.

a. Analicen sus construcciones y respondan.

- ¿El triángulo que trazó el alumno es semejante al del parque? ¿Por qué? ____________
- ¿Es posible cubrir toda la superficie del cuadrado 3 con los otros triángulos? ¿Por qué?
- ¿Qué sucedería con los cuadrados si el triángulo de la construcción fuera equilátero?
- Repitan la actividad con un triángulo equilátero para validar su respuesta.

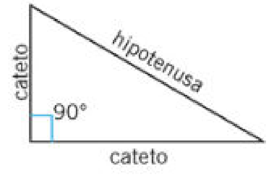
b. Discutan la relación que hay entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo y entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre un triángulo equilátero. Completen la tabla con sus conclusiones.

	Triángulo rectángulo	Triángulo equilátero
Relación entre las áreas de los cuadrados		

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Analicen la información y reescriban en su cuaderno las opciones que ofrece Pedro en el problema inicial, usando los términos que se muestran en la figura. Hagan lo mismo con el plano.



Los lados de un triángulo rectángulo se pueden identificar como se muestra en la figura.

Áreas y lados

4. **En pareja analicen, respondan y validen lo que se solicita.**

a. Tracen un triángulo rectángulo isósceles y un triángulo rectángulo escaleno.

- En cada triángulo tracen los cuadrados que coinciden con la medida de los catetos y la hipotenusa.

b. ¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados que trazaron en cada cateto con el del cuadrado que trazaron en la hipotenusa? ____________

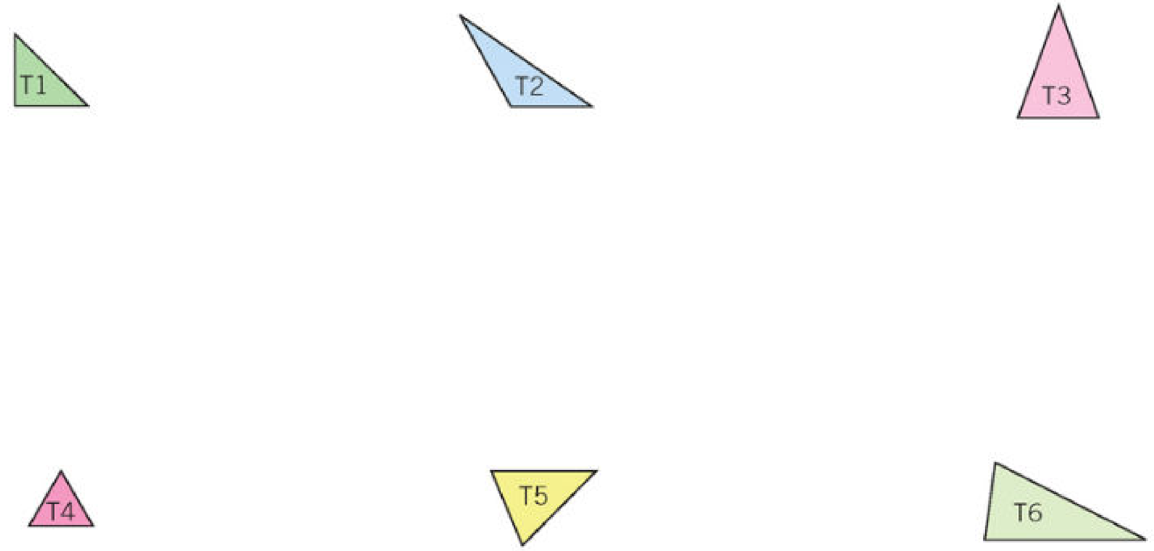
- Comparen su respuesta anterior con la conclusión a la que llegaron en el inciso b del punto 2. Si encontraron discrepancias, ajústenla.

› Socialicen sus conclusiones y junto con el profesor planteen una conclusión grupal.

5. **Analicen, discutan y respondan.**

a. ¿Su conclusión describe la relación de las áreas de los cuadrados que se trazan en los lados de cualquier triángulo rectángulo? Argumenten. ____________

b. En cada uno de los lados de los siguientes triángulos tracen un cuadrado cuya medida sea la misma del lado correspondiente.



- ¿En todos los casos se cumple la conclusión a la que llegaron en la actividad 3, inciso b? ¿Por qué? ______________________________

____

c. Con base en lo anterior, validen la siguiente afirmación. Escriban sus argumentos.

"En los triángulos rectángulos, la suma de las áreas de los cuadrados que se trazan en los catetos es igual al área del cuadrado que se traza en la hipotenusa".

____

____

› Socialicen sus argumentos geométricos y registren sus acuerdos. Si hay dificultades o dudas, coméntenlas en clase con la finalidad de aclararlas.

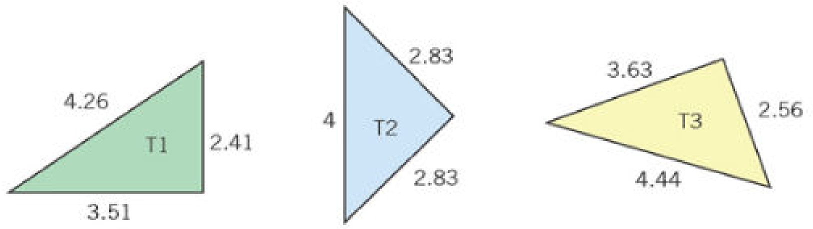
© SANTILLANA

© SANTILLANA

Triángulos y cuadrados

6. Calcula y justifica lo que se solicita.

a. Considera las medidas dadas y calcula el área de los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa de cada triángulo.



	Triángulo T1	Triángulo T2	Triángulo T3
Área de los cuadrados			

b. Aplica las relaciones entre las áreas de los cuadrados que encontraste a lo largo de la lección y valida que se cumplen en los triángulos de la actividad.

› Socialicen sus razonamientos y registren una conclusión fi al.

Reto — Problemas de áreas

1. Analiza la figura y determina el área de los cuadrados que se trazarían en los catetos del triángulo *A*.

a. Reúnete con un compañero y planteen un problema que se pueda modelar con la figura de la derecha.

b. Intercambien los problemas y resuélvanlos. Revisen que los contextos sean cercanos a lo que puede suceder en la realidad.

2. Investiguen en un medio electrónico o impreso el nombre de la relación geométrica estudiada. Después coméntenlo en clase.

› Comenten en grupo las dificultades que enfrentaron a lo largo de la lección y cómo las resolvieron.

Apoyo tecnológico

En esta página se enuncia el teorema de Pitágoras. La animación te permitirá explorar visualmente la figura geométrica.

http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_160/index.html

Comparte con tus compañeros la información. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

12

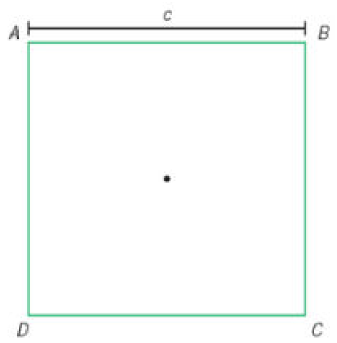
El teorema de Pitágoras

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras

1. En equipos, hagan los trazos y respondan.



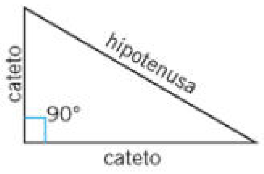
- En el cuadrado *ABCD*, obtengan el punto medio del segmento *AB*.
- Tracen un segmento de recta que pase por el punto medio y por el vértice *C*.
- Obtengan el punto medio del segmento *BC* y tracen un segmento que pase por él y por el vértice *D*.
- Ubiquen el punto medio del segmento *CD* y tracen la recta que pase por él y por el vértice *A*.
- Unan el vértice *B* con el punto medio del segmento *AD*.
- Tracen los vértices del cuadrado central y dividan el área restante en cuatro triángulos rectángulos congruentes.

  - Llamen *a* al cateto menor y *b* al cateto mayor de cada uno de los cuatro triángulos rectángulos que se formaron. ¿Cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo? _____
  - ¿Cuánto miden los lados del cuadrado interior que se formó? _____

a. Completen la tabla.

Figura	Fórmula	Área
Cuadrado original	$c \times c$	
Cuadrado interior		
Triángulos		

b. Sumen las áreas del cuadrado interior con las áreas de los cuatro triángulos. Establezcan la igualdad entre el área del cuadrado original y la suma anterior. Simplifiquen la igualdad.



2. Resuelvan en equipo lo siguiente.

a. Paola investigó el teorema de Pitágoras, que dice lo siguiente:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

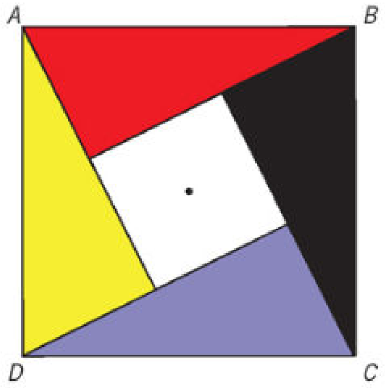
© SANTILLANA

© SANTILLANA

- ¿Qué relación se puede establecer entre la expresión algebraica obtenida en el inciso b y el teorema de Pitágoras? Argumenten sus respuestas. _____
- Dada la medida de dos lados de un triángulo rectángulo, ¿es posible obtener la medida del tercero aplicando el teorema de Pitágoras? ¿Por qué? _____

› Socialicen sus argumentos y respuestas. Lleguen a una conclusión grupal.

b. El cuadrado representa la construcción de Paola. Los catetos del triángulo rojo miden 4.47 cm y 2.24 cm respectivamente.



- ¿Qué relación hay entre la hipotenusa del triángulo rojo y uno de los lados del cuadrado *ABCD*? _____
- ¿Cuánto mide de lado el cuadrado interno? _____
- ¿Cuál es el área del cuadrado *ABCD*? _____
- Escriban el procedimiento que siguieron para contestar las preguntas anteriores. _____

c. Jacinto, compañero de Paola, construyó un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 6 cm y uno de los catetos 3 cm.

- ¿Cuál es la medida del segundo cateto? _____
- ¿Cómo la obtuvieron? _____

d. Verifiquen que el triángulo, cuyas medidas son 10 cm, 6 cm y 8 cm, es un triángulo rectángulo. Describan el procedimiento que emplearon. _____

› Socialicen sus conclusiones y, junto con su profesor, planteen una conclusión final.

3. En pareja, analicen la siguiente información.

Un teorema es una afirmación que debe ser demostrada formalmente. En matemáticas, los teoremas pueden probarse a partir del álgebra y de la geometría.

Teorema de Pitágoras

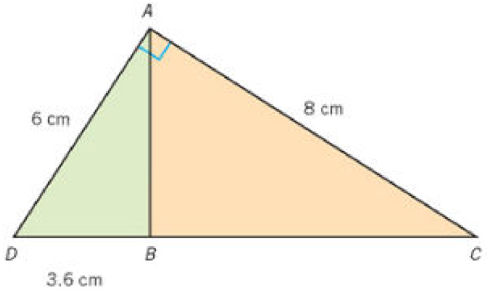
En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados que se trazan en cada uno de los catetos es igual al área del cuadrado que se traza en la hipotenusa. Si a y b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa, el teorema se representa como: $a^2 + b^2 = c^2$.

- Propongan un procedimiento para comprobar el teorema de Pitágoras, aplíquenlo y escriban su conclusión. En grupo, expongan sus análisis y con ayuda de su profesor elaboren una conjetura.

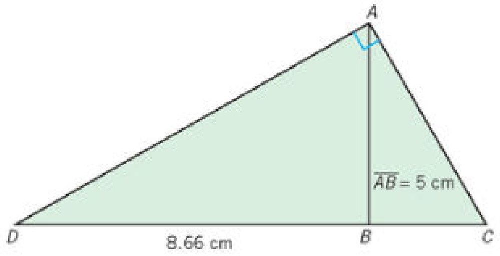
Aplicación del teorema de Pitágoras en la resolución de problemas

4. En pareja, resuelvan los siguientes problemas. Expongan, en cada caso, el procedimiento que aplicaron.

a. Calculen el área de ΔADC, para ello obtengan la medida de $\overline{AB}$, que corresponde con una de sus alturas.



- ¿Cuánto mide $\overline{AB}$? ____________
- ¿Cuál es el área de ΔADC? ____________
- ¿Qué procedimiento siguieron para obtener el dato solicitado? ____________
- Escriban la medida de $\overline{BC}$ y calculen el área de ΔABC. ____________



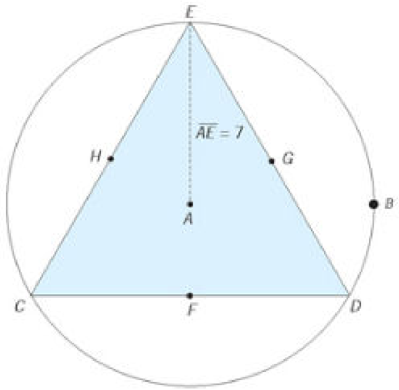
b. Determinen la medida de $\overline{AC}$ y de $\overline{DC}$.

- $\overline{AC}$ = ____________
- $\overline{DC}$ = ____________
- ¿Cómo obtuvieron las medidas solicitadas? ____________

© SANTILLANA

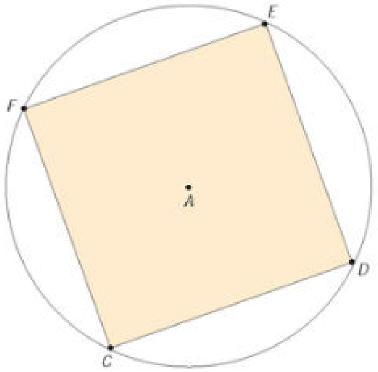
c. Consideren que ΔCDE...

- es un triángulo equilátero, inscrito en una circunferencia, cuya medida del radio es 7 cm.
- el centro de la circunferencia (punto A) es el baricentro de ΔCDE.
  - ¿Cuál es el área del ΔCDE? ____________
  - Expliquen el procedimiento que siguieron. ____________



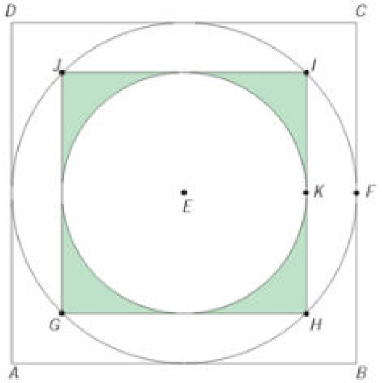
d. Calculen el área del cuadrado $CDEF$ inscrito en la circunferencia con centro en A, cuya medida del radio es de 12 cm.

- ¿Cómo obtuvieron la medida del lado del cuadrado? ____________
- ¿Cuál es el área de $CDEF$? ____________



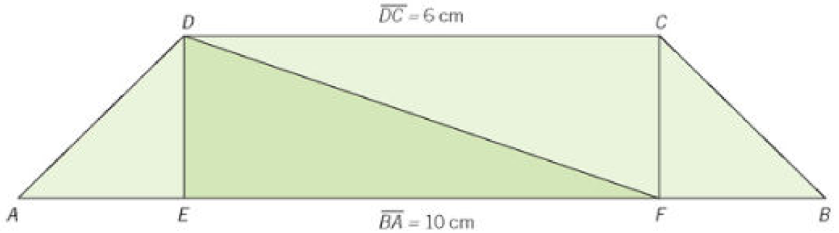
e. Determinen la medida del área comprendida entre el cuadrado $JIHG$ y el círculo inscrito en él, si la medida del cuadrado $ABCD$ tiene 16 cm de lado.

- ¿Cuál es el área del cuadrado $JIHG$? ____________
- ¿Cuánto mide la superficie de color? ____________
- ¿Qué procedimiento siguieron para obtener el área? ____________



© SANTILLANA

f. Calculen el área del trapecio isósceles; consideren que la medida del perímetro es de 21.66 cm.

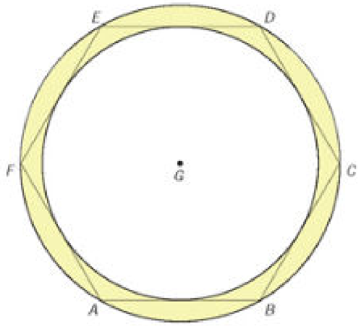


- ¿Cuál es la medida de $\overline{AD}$? ______
- Tengan en cuenta que $\overline{DE}$ es homólogo de $\overline{CF}$ y determinen la medida de ambos.
- ¿Cuál es el área de $\Delta\, DEF$? ______
- ¿Cuál es la medida del área del trapecio *ABCD*? ______
- ¿Cómo obtuvieron los datos faltantes? ______

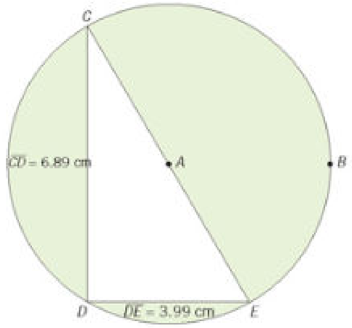
› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, expongan sus procedimientos para validarlas. En caso necesario, hagan correcciones.

5. De manera individual, resuelve los siguientes problemas. Escribe tus operaciones.

Calcula el área de la corona circular. Considera que el hexágono regular que se muestra mide 12 cm de lado.



- Área de la corona circular: ______
- Explica tu procedimiento. ______



a. Determina la medida de la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

- ¿Qué datos se requieren para obtener la longitud de la circunferencia? ______
- ¿Y para obtener el área del círculo? ______
- Si en la construcción no se encuentran todos los datos necesarios para calcular lo que se solicita, escribe el procedimiento que debes seguir para obtenerlos. ______

Área: ______ Perímetro: ______

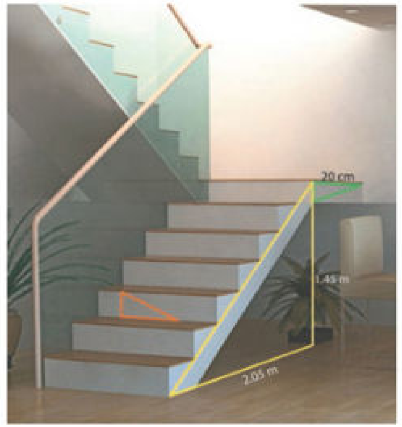
› Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros y valídalos con ayuda del profesor.

© SANTILLANA

Otro problema

6. En equipo, discutan el procedimiento que deben seguir para resolver el problema y respondan.

a. En una escalera se colocará un refuerzo de madera que va desde el primer escalón hasta el descanso. ¿Cuánto medirá el refuerzo? Expliquen su procedimiento.



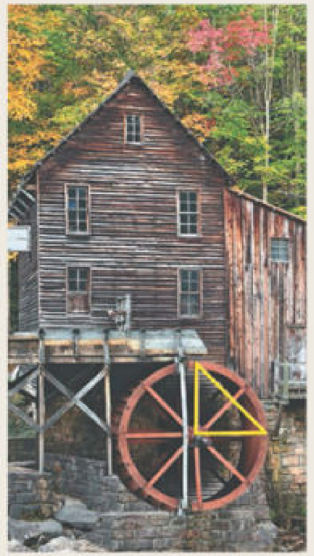
- ¿Es posible calcular la altura de cada escalón con la información proporcionada? ¿Por qué? ______
- ¿Cuál es la medida del ancho del escalón? ______
- ¿Qué distancia hay entre el inicio de un escalón y el siguiente? ______
- ¿Qué relación hay entre el triángulo anaranjado y el triángulo amarillo? Argumenten. ______

b. Planteen un problema que se pueda resolver con el triángulo verde. Consideren que pueda aplicarse el teorema de Pitágoras. ______

› Intercambien sus problemas con otros equipos y resuélvanlos. Discutan en qué otros contextos puede aplicarse el teorema de Pitágoras.

Reto Teorema de Pitágoras

1. En pareja, analicen la imagen y planteen un problema asociado con el teorema de Pitágoras.



› Intercambien su problema con otros compañeros y resuélvanlo. Analicen si se proporcionó la información suficiente. Ofrezcan sugerencias si es necesario.

2. Justifiquen la veracidad del siguiente enunciado:

"El teorema de Pitágoras establece la relación entre las longitudes de los catetos y la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo".

› Discutan en grupo sus experiencias. Durante las actividades anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para resolverlas.

Apoyo tecnológico

Visita la siguiente página y resuelve los problemas que ahí se plantean.

http://www.vitutor.com/geo/eso/asActividades.html

Comparte tus experiencias con tus compañeros y consulta tus dudas con el profesor.

(consulta: 29 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

13 Mutuamente excluyentes y complementarios

Eje: Manejo de la información
Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

La urna con pelotas

1. Reunidos en pareja, realicen lo que se solicita.

La maestra de un grupo de secundaria propuso a sus alumnos que, para realizar un experimento, elaboraran dos cajas de cartón con tapa, simulando una urna, con seis pelotas etiquetadas con los números del 1 al 6 en cada una, parecida a la que se muestra. El experimento consistía en extraer una pelota de cada urna, registrar los números obtenidos y regresarla.

a. En su cuaderno, registren en una tabla el espacio muestral del experimento.

› Validen en grupo que el espacio muestral sea correcto.

b. Registren en la tabla el espacio muestral de cada evento y la probabilidad de que ocurra. En las últimas tres filas escriban tres eventos asociados a la experiencia aleatoria.

Enunciado del evento	Espacio muestral	Probabilidad (P)
Evento A: extraer una pelota de cada urna y que ambas tengan el mismo número.	A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}	$P(A) = \frac{6}{36}$
Evento B: que la suma de las pelotas extraídas sea 10.		
Evento C: que el producto de los números de ambas pelotas sea 8.		
Evento D: que el producto de los números de las pelotas sea 12.		
Evento E:		
Evento F:		
Evento G:		

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Validen en grupo los eventos que propusieron; en caso de que haya errores o alguno no corresponda con el experimento, realicen los ajustes necesarios.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Eventos simples, eventos compuestos y eventos complementarios

2. Retomen el experimento anterior y los datos de la tabla y respondan.

a. Lean nuevamente los eventos A, B y C de la tabla de la página anterior. ¿Estos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo? Expliquen por qué. ______

b. Al realizar el experimento, un alumno obtuvo las pelotas que se muestran.

- Si consideramos los eventos A, B y C, ¿a cuál de ellos correponde este resultado? Argumenten su respuesta. ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que en este mismo evento la suma de las pelotas extraídas sea 9? ______
- ¿Es posible que la suma de esos números sea 11? ¿Podemos decir que estos eventos son mutuamente excluyentes? Expliquen. ______

c. Al realizar una extracción se obtienen dos números iguales, ¿puede suceder al mismo tiempo que la suma de esos números sea 12? ______

- ¿Estos eventos son mutuamente excluyentes? ¿Por qué? ______

d. Registren el espacio muestral de los siguientes eventos. Después, respondan.

- Evento I. Se obtienen dos números iguales: ______
- Evento J. El producto de ambos números es cuatro: ______
- ¿Los eventos anteriores son mutuamente excluyentes? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cada evento? ______
- ¿Qué resultados tienen en común? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los dos eventos al mismo tiempo? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno u otro evento? ______

e. Registren en su cuaderno el procedimiento que siguieron para determinar la probabilidad de las dos últimas preguntas.

› Socialicen sus respuestas y argumentos; si hay dudas, resuélvanlas en grupo con el apoyo del maestro. Después, registren en el cuaderno sus conclusiones.

3. **Reunidos en equipo, apliquen lo analizado y realicen en su cuaderno lo que se pide.**

a. Retomen los siete eventos registrados en la tabla de la actividad inicial.

- ¿Cuál de los siete eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir? Expliquen.
- ¿Qué evento tiene menor probabilidad? Expliquen.
- Formulen dos eventos mutuamente excluyentes.
- Escriban dos eventos que no sean mutuamente excluyentes.

b. Tres profesores de matemáticas *A*, *B* y *C* tienen que checar su hora de entrada a la escuela todos los días. Si solo hay un checador, determinen:

- El espacio muestral del orden de llegada de los tres profesores.
- El evento de que el profesor *B* llegue primero.
- El complemento del evento anterior.
- El evento de que el profesor *A* no llegue en segundo lugar.

c. En una tienda, todos los días el encargado controla cuánto tiempo tarda en cargar un videojuego en una misma consola. Consideren lo anterior como un experimento aleatorio en el que puede ocurrir alguno de los siguientes eventos:

- Evento A: "El videojuego se inicia inmediatamente".
- Evento B: "El videojuego se inicia después de 5 minutos".
- Evento C: "El videojuego se inicia después de 10 minutos".

- Describan el complemento del evento B.
- Describan el complemento del evento C.

› Socialicen sus argumentos, respuestas y procedimientos en grupo; lleguen a consensos y regístrenlos en su cuaderno.

4. **Retomen el problema de la urna de la actividad inicial para resolver las actividades.**

a. Retomen la tabla y discutan, ¿pueden ocurrir al mismo tiempo los eventos A y B? Expliquen su respuesta. ____

- De ser afirmativa la respuesta anterior, ¿cuáles son los resultados favorables? Expliquen. ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno u otro evento? Argumenten su respuesta. ____
- ¿Lo anterior se puede representar como $P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$? Expliquen su postura. ____

b. Consideren el evento H: al extraer una pelota de cada urna, la suma de los números es igual o mayor que 6. Calculen la probabilidad del evento. $P(H) =$ ____

c. Determinen si al mismo tiempo pueden ocurrir los eventos H y C y calculen la probabilidad de ocurrencia de ambos eventos. ____

© SANTILLANA

© SANTILLANA

d. Se tiene el evento K: extraer dos pelotas con números distintos. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra? ____

- ¿Qué relación hay entre el evento K y el evento A que aparece en la tabla? Justifiquen su respuesta. ____

e. Consideren el evento L: extraer dos pelotas, una de cada urna y que el producto sea un número par. Calculen $P(L) =$ ____

f. El evento M es complementario de L, escriban el espacio muestral del evento M y calculen su probabilidad.

- M = ____ • P(M) = ____

› Socialicen sus estrategias y respuestas y registren sus ideas acerca de lo trabajado. Después, lean la siguiente información teórica.

Como viste en la lección 6, un espacio muestral es un conjunto de posibles resultados de una experiencia aleatoria. En un experimento aleatorio, **un evento simple** o **elemental** es un subconjunto del espacio muestral que contiene un único elemento, por ejemplo, al lanzar un dado, los eventos $A = \{1\}$ y $B = \{5\}$ son simples.

Un **evento compuesto** es el subconjunto del espacio muestral que incluye dos o más eventos simples, por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado: $C = \{1, 3, 5\}$ y $D = \{4, 5, 6\}$ son eventos compuestos.

Un **evento complementario** del evento A es otro evento formado por los resultados del experimento que pertenecen al espacio muestral, pero que no son parte del evento A. El complemento del evento A se simboliza como A^c. La probabilidad de un evento complementario A^c es: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

› Observen la imagen de la derecha y ,con base en esta, planteen un evento simple, un evento compuesto y un evento complementario.
› Retomen los problemas resueltos en la actividad anterior, identifiquen los tipos de eventos involucrados y, con ayuda del profesor, registren sus conclusiones.

La encuesta sobre viajes de trabajo

5. **Reunidos en pareja, realicen lo que se indica.**

La siguiente tabla muestra los resultados de una encuesta realizada por una cadena hotelera en la terminal aérea de la Ciudad de México, con la finalidad de ofrecer paquetes de hospedaje a personas que viajan frecuentemente por motivos de trabajo.

a. Completen los datos faltantes de la siguiente tabla.

Frecuencia de viajes al mes	12	6	Total
Número de mujeres	120	40	
Número de hombres	160	80	
Total de personas			

b. Para hacerse promoción, la cadena hotelera realizará un sorteo para regalar dos noches de hospedaje con alimentos. Al modelar matemáticamente la situación, se puede establecer lo siguiente:

Evento A: viaja 12 veces al mes; evento B: es mujer; evento C: viaja 6 veces al mes, y evento D: es hombre. De acuerdo con lo anterior, respondan en su cuaderno.

- Al realizar el sorteo, ¿puede ganar una persona que viaja 12 veces al mes y que sea mujer? Expliquen su respuesta.
- ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
- Al obtener al ganador, ¿este puede ser una persona que viaja 12 veces al mes y que también viaje 6 veces? Expliquen su respuesta.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea hombre?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador viaje 12 veces al mes?
- ¿El ganador puede ser mujer y al mismo tiempo viajar 6 veces al mes? ¿Qué tipo de eventos son los anteriores?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos anteriores al mismo tiempo? Describan cómo obtuvieron la respuesta.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona ganadora viaje 12 veces al mes o que viaje 6 veces al mes y sea mujer? Escriban la expresión para calcular la probabilidad.

› Socialicen sus respuestas. Centren la discusión en el procedimiento empleado en las dos últimas preguntas. Después registren sus acuerdos.

c. Analicen los siguientes eventos y determinen si son eventos mutuamente excluyentes. Justifiquen cada caso.

Eventos	¿Son mutuamente excluyentes?	Justificación
Viaja 12 veces al mes o es mujer.		
Viaja 12 veces al mes o viaja 6 veces al mes y es mujer.		
Es hombre o viaja 6 veces al mes y es mujer.		
Viaja 6 veces al mes o viaja 12 veces al mes y es hombre.		

- Cuando se tienen dos eventos mutuamente excluyentes, ¿la ocurrencia de un evento hace imposible que suceda el otro evento? Argumenten.

d. Analicen los datos y escriban dos ejemplos de eventos mutuamente excluyentes:

- Ejemplo 1: Evento F: ______________ Evento G: ______________
- Ejemplo 2: Evento H: ______________ Evento I: ______________

› Socialicen sus productos, argumenten lo realizado y verifiquen en grupo, con la ayuda del profesor, que sus resultados sean correctos.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

6. Reunidos en pareja, completen la tabla y resuelvan en su cuaderno.

a. La tabla muestra algunos datos de la encuesta realizada por la misma cadena hotelera en la temporada de mayor demanda.

Frecuencia de viajes al mes	12	6	Total
Mujeres	170	140	
Hombres	180	210	
Total de personas			

- Sea el evento A: viaja 12 veces al mes, si se selecciona una persona al azar. ¿Cuál es la P(A)?
- Sea el evento B: viaja 6 veces al mes y es mujer. ¿Cuál es la P(B)?
- Carlos dice que para calcular la probabilidad de los eventos A o B se puede usar la expresión P(A) + P(B). ¿Están de acuerdo con lo anterior? Justifiquen.
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A o el B?
- ¿Cuántas personas viajan 12 veces al mes y además son hombres?
- Dado el evento C: es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar a una persona esta cumpla con el evento A y el C al mismo tiempo? Justifiquen.
- ¿Cuántas son las personas que cumplen con el evento A o el evento C?
- ¿La expresión P(A) + P(C) – P(A y C) ayuda a determinar la probabilidad de uno u otro evento? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno u otro evento?
- Comparen los resultados de las dos preguntas anteriores. ¿Cómo son? Expliquen.

› Discutan sus argumentos y registren sus conclusiones, antes de la validación en grupo. Incluyan en la discusión la siguiente información teórica:

Cuando dos eventos que son parte de un mismo espacio muestral, y además se sabe que son mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de uno u otro se puede determinar al sumar las probabilidades de ambos:

Por ejemplo, si A y B son eventos mutuamente excluyentes: P(A o B) = P(A) + P(B).

Si los eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro se puede determinar al sumar las probabilidades de cada evento, menos la probabilidad de que sucedan al mismo tiempo:

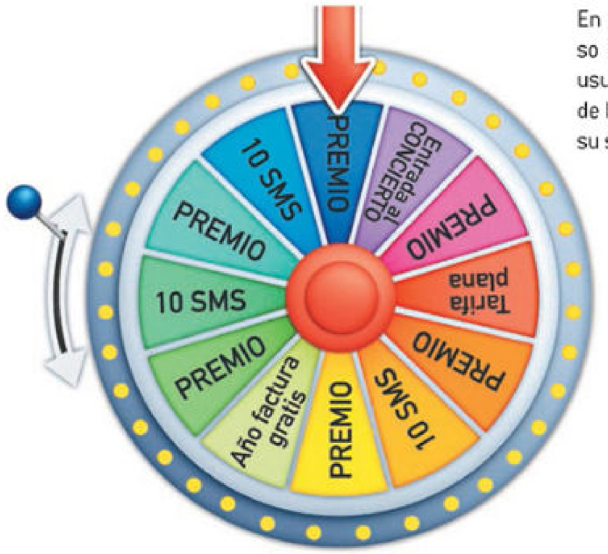
Si A y B no son excluyentes: P(A o B) = P(A) + P(B) – P(A y B).

Por ejemplo, al lanzar dos dados, un jugador puede ganar un premio si en cualquiera de los dados sale 6 o si la suma de ambos es igual a 8 puntos, entonces se puede afirmar que los dos sucesos no son mutuamente excluyentes porque hay resultados que pueden estar presentes en ambos eventos. La probabilidad de obtener 6 es $\frac{11}{36}$, de que la suma sea 8, $\frac{5}{36}$ y de que sucedan ambos casos es $\frac{2}{36}$ (2, 6 y 6, 2). Por tanto, la probabilidad de que ocurra uno de los dos eventos es: $\frac{11}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{14}{36}$.

› Comenten sus experiencias en grupo y registren sus acuerdos.

Problemas de aplicación

7. **Reunidos en pareja, analicen los planteamientos que se describen y resuelvan.**



En un programa de concursos, una compañía telefónica propuso como estrategia publicitaria otorgar premios y regalos a los usuarios por medio de la ruleta que se muestra. En el programa de hoy, Guadalupe concursa. Apliquen lo estudiado para analizar su situación.

a. Sea el evento A: que la ruleta se detenga en un año de "factura gratis", y el evento B: que la ruleta se detenga en "premio".

- ¿Cuál es la probabilidad del evento A? P(A) = ____
- ¿Cuál es la probabilidad del evento B? P(B) = ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o B? P(A o B) = ____
- ¿Los eventos son mutuamente excluyentes? Sustenten su respuesta. ____

b. Si el evento C es 10 mensajes gratis, y el evento D, entradas a un concierto, obtengan la probabilidad de cada evento:

- P(C) = ____
- P(D) = ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra C o D? P(C o D) = ____

› Discutan los resultados obtenidos y la forma de obtenerlos. Determinen si existe alguna diferencia en estos eventos, y si es el caso, exprésenla.

8. **Lean la información, completen los datos de la tabla y respondan en su cuaderno.**

a. En la siguiente tabla se registran los resultados de una encuesta relacionada con la pregunta: *¿Alguna vez has viajado en avión?* Escriben el nombre de los entrevistados y, al final, realizan una rifa.

	Sí		No		Total	
	Frecuencia	Probabilidad	Frecuencia	Probabilidad	Frecuencia	Probabilidad
Mujer	35		23			
Hombre	44		31			
Total						

- Al realizar la rifa, ¿por qué los resultados favorables del evento que sea mujer y que sea hombre son mutuamente excluyentes? Sustenten su respuesta.
- Escribe cómo calcular la probabilidad de los eventos "que sea mujer" y "que sea hombre".

© SANTILLANA

© SANTILLANA

b. Para la rifa se tienen los siguientes eventos. Evento A: ha viajado en avión; evento B: es mujer, evento C: no ha viajado en avión, y evento D: es hombre.

- ¿Pueden ocurrir al mismo tiempo los eventos A y C? Expliquen.
- Escriban un evento que sea mutuamente excluyente al evento D.
- Escriban un evento complementario al evento B.
- Escriban un evento compuesto y determinen su probabilidad.

c. Analicen cada uno de los siguientes eventos y determinen si son o no mutuamente excluyentes. Justifiquen cada caso. Después respondan.

- Ha viajado en avión o es mujer.
- Ha viajado en avión o no ha viajado en avión.
- Ha viajado en avión o es hombre.
- Es hombre o es mujer.
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra "ha viajado en avión" o "no ha viajado en avión"?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra "ha viajado en avión" o "es mujer"?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra "es hombre" o "es mujer"?

› Socialicen sus respuestas, argumenten lo realizado y verifiquen, con la supervisión del maestro, que sus resultados sean correctos.

Reto Eventos aleatorios

1. **Reunidos en pareja, resuelvan los siguientes problemas.**

Con las letras *A*, *M*, *O*, *R*, se quiere formar todas las palabras posibles sin repetir ninguna de ellas.

a. ¿Cuántas palabras se pueden formar, tengan o no un significado?

b. Si se selecciona una palabra al azar, consideren los siguientes eventos:

- Evento A: las vocales *A* y *O* están juntas.
- Evento B: las vocales *A* y *O* no están juntas.
- Evento C: la consonante *M* y la vocal *A* están juntas.
- Evento D: la consonante *M* y la vocal *O* están en los extremos.
- ¿Cuántos son los resultados favorables de cada evento?
- Escribe al menos tres ejemplos de eventos mutuamente excluyentes.

c. Calcula lo que se pide.

Eventos	Probabilidad del evento
P(A o B)	
P(B y C)	
P(B o D)	
P(C o D)	

d. Retomen la imagen de la página 109 y planteen un evento mutuamente excluyente y eventos complementarios.

› Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades que encontraron y socialícenlas para aclararlas juntos.

Apoyo tecnológico

En este sitio podrás aplicar lo estudiado y analizar los ejemplos. Realiza lo que se solicita.

http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=137622

En las siguientes dos páginas revisa lo que se pregunta y haz las actividades que se plantean.

https://dl.dropboxusercontent.com/u/44162055/manipulables/varios/urnanumcolorbis.swf

https://dl.dropboxusercontent.com/u/44162055/manipulables/varios/manomoneda.swf

Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 29 de diciembre 2016)

Para saber más

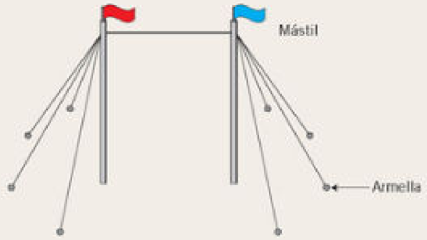
Aplicaciones del teorema de Pitágoras

En esta sección aplicarás tus conocimientos acerca del teorema de Pitágoras, el cual estudiaste en la lección 12.

1. En pareja analicen el planteamiento que se propone y contesten en su cuaderno.

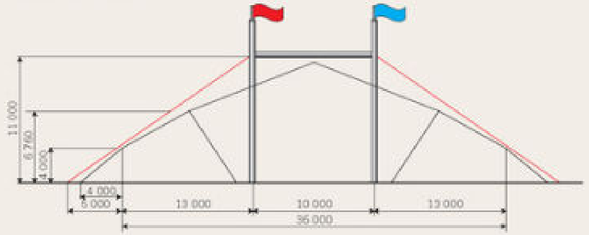
a. Mario trabaja en un circo y es el encargado de instalar la carpa. Él sabe que se deben fijar los cables que sostienen cada mástil vertical a una armella colocada en el piso a cierta distancia de la base. Mario debe calcular la cantidad de cable que se necesitará para montar la carpa del circo según el siguiente diseño:


Carpa de circo



- Si la altura del mástil es de 16 m y la distancia entre la base del mástil y cada armella es de 13 m, ¿cuántos metros de cable debe usar Mario para cada soporte lateral?
- Describan el procedimiento utilizado para contestar la pregunta anterior.
- Con la información proporcionada, ¿se puede calcular el total de cable necesario para la carpa? ¿Por qué?

b. La compañía circense decidió ampliar el espectáculo y, por consiguiente, usará una carpa más grande. Una empresa española le propuso el siguiente modelo. Las medidas están dadas en milímetros:



- Si la línea roja representa un tipo especial de cable reforzado. ¿Cuánto debe medir? Describan el procedimiento que siguieron para encontrar el resultado. Utilicen trazos en su descripción.
- ¿Cuántos metros de cable reforzado se necesitan para la nueva carpa? Justifiquen su respuesta.

› Socialicen sus respuestas y argumentos. Si tienen dudas, coméntenlas con el profesor.

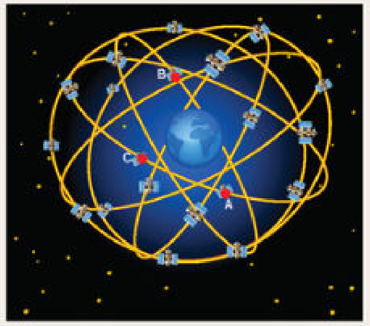
© SANTILLANA

© SANTILLANA

2. Lean el texto y respondan en su cuaderno.

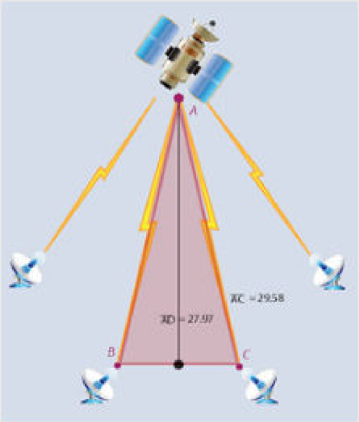
El Sistema de Posicionamiento Global (SPG), por sus siglas en inglés GPS (*Global Positioning System*), es un sistema de navegación basado en satélites y receptores. Esta tecnología determina la posición de una persona o un objeto, fijo o móvil, en la Tierra. El sistema consta de veinticuatro satélites organizados en seis órbitas que recorren dos veces al día. Estos satélites se encuentran a una distancia aproximada de 20 000 km de la superficie terrestre. Por su confiabilidad y eficiencia, el GPS tiene una gran cantidad de aplicaciones.

Cuando se desea determinar la posición de un objeto, se usa un aparato que recibe las señales que mandan los satélites y, por medio de una triangulación, calcula la distancia a dichos satélites y así, su posición. Esto se logra al tomar el tiempo que tarda en recibir la señal de un satélite y compararlo con el tiempo que tarda en recibir la señal de otros. A su vez, los satélites contienen información que les indica dónde se encuentran los otros satélites del sistema.



a. Observen la imagen de la derecha. Consideren que los satélites *A*, *B* y *C* forman un triángulo rectángulo.

- Determinen la distancia que recorrerá la información si del satélite *B* se transmite al satélite *A* y entre estos existe una distancia aproximada de 53 116 km, a su vez, la información pasa del satélite *A* al *C*, recorriendo 34 837 km y de este último al *B*.
- Supongan que hay un satélite *D*, de tal manera que *B*, *C* y *D* también forman un triángulo rectángulo. Si la distancia que hay del satélite *B* al *C* es la misma que hay del satélite *C* al *D*, y siendo *C* el ángulo recto, ¿cuál es la distancia total que recorre la información? Tracen el triángulo que se forma y utilicen literales para escribir su respuesta.



b. Observen la imagen de la derecha. Consideren que es necesario medir las distancias de los receptores para calcular su posición con respecto del satélite *A*.

- Si las distancias están dadas en kilómetros, ¿cuál es la distancia que hay entre los receptores *B* y *C*?
- Si se manda una señal del receptor *C* al satélite *A*, del satélite al receptor *B* y finalmente se regresa la señal al receptor *C*, ¿cuál es la distancia que recorre la información?

› Comparen sus respuestas y registren sus acuerdos.

3. En equipos, investiguen dos aplicaciones del teorema de Pitágoras en distintos contextos que consideren importantes. Justifiquen el uso del teorema y busquen imágenes para ejemplificarlas.

- Expongan sus ejemplos al resto del grupo y expliquen detalladamente por qué las eligieron y cómo se aplica el teorema.

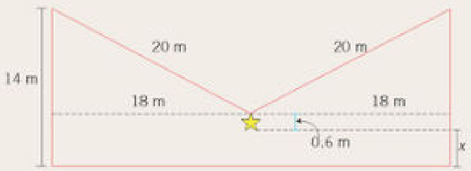
› Comenten en grupo las exposiciones y con ayuda del profesor resuelvan las dudas que surjan.

Evaluación tipo PISA

› Elige la respuesta correcta.

En una fiesta se colgó una piñata y quedó justo a la mitad de una cuerda de 40 m, que está atada a los extremos de dos postes, tal como se muestra en la imagen.

1. Analiza el modelo geométrico y determina a qué altura del suelo está la piñata.



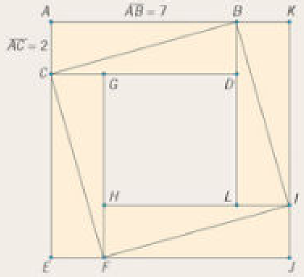
A) La piñata está a 9.3 m del suelo. Ya que: $\sqrt{20^2 - 18^2} = 8.7$, $x = 8.7 + 0.6 = 9.3$.

B) La piñata está a 2 m del suelo, debido a que la raíz y el exponente se cancelan: $\sqrt{20^2 - 18^2} = 2$.

C) La piñata está a 8.7 m del suelo. Se calcula la diferencia de cuadrados de los lados del triángulo y después se obtiene la raíz cuadrada: $\sqrt{20^2 - 18^2 - 18^2} = 8.7$.

D) La piñata está a 4.7 m del suelo, ya que: $\sqrt{20^2 - 18^2} = 8.7$, $x = 14 - 8.7 - 0.6 = 4.7$.

2. El modelo geométrico que se muestra representa un vitral que se usará para decorar la pared en una galería de arte. ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrado *CBIF*?



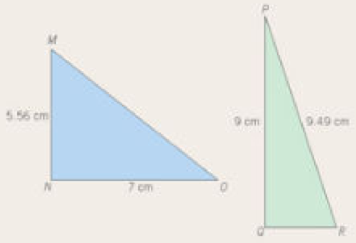
A) $P = \sqrt{81} \times 4$ y $A = (\sqrt{81})^2$

B) $P = \sqrt{53} \times 4$ y $A = (\sqrt{53})^2$

C) $P = 36$ y $A = 81$

D) $P = \sqrt{7+2} \times 4$ y $A = (\sqrt{7} + 2)^2$

3. ¿Cuál de los dos triángulos rectángulos que se muestran tienen mayor perímetro?

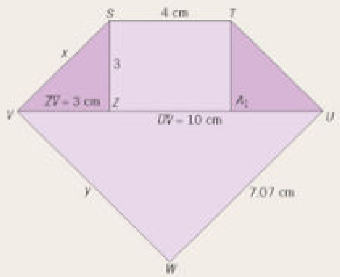


A) ΔMNO

B) ΔPQR

C) Miden lo mismo.

D) No se puede saber porque faltan datos.



4. ¿Cuál es la medida del perímetro del pentágono?

A) 28.28 cm **B)** 24.14 cm **C)** 18.14 cm **D)** 26.63 cm

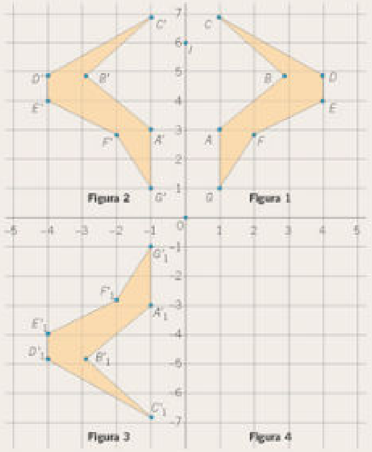
› Realiza lo que se indica en cada caso.

5. Explica por qué los problemas 1 a 4 se pueden resolver aplicando el teorema de Pitágoras. ______

© SANTILLANA

© SANTILLANA

6. Con base en la imagen, realiza lo que se indica.



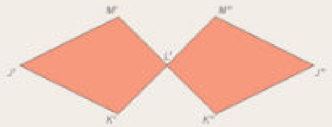
a. Explica el procedimiento para trazar la figura 2, a partir de la figura 1. ______

b. ¿Qué figuras están relacionadas con simetría central? Explica tu respuesta. ______

c. Expón cuál es el procedimiento para trazar la figura 3 a partir de la figura 2. ______

d. Construye la figura 4 de manera que sea una traslación de unidades de la figura 2. Considera (4, −7) para el vértice *G'*. Describe el procedimiento.

7. Da las instrucciones para armar un teselado, a partir de simetrías de la figura.



______

8. Determina si las afi maciones son verdaderas (V) o falsas (F).

Afir ación	Veracidad
Cuando todos los vértices y lados de una figura se mueven en una misma dirección, es decir, en trayectoria recta, y además conservan la medida de sus lados, ángulos, las áreas y las formas, se dice que es una traslación.	
En una rotación se tiene solo la característica de un punto denominado "centro de rotación".	
Las transformaciones en el plano hacen corresponder a cada punto del plano con otro punto, conservando las distancias, es decir, la distancia entre dos puntos es igual a la distancia entre sus puntos transformados. A estas transformaciones se les conoce como "isometrías".	

Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Utiliza los términos *siempre*, *a veces* o *poco*, y completa la tabla.

Indicadores			
Explico el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifico las propiedades que se conservan.		Resuelvo problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	

En clase externa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.

BLOQUE 3

Invitación a la lectura

Tales de Mileto

Nació alrededor del año 624 a. de C. en Mileto, Asia Menor (en lo que hoy es Turquía) y murió en el año 548 a. de C. Por sus saberes en áreas como comercio, ingeniería, astronomía y geometría, fue considerado uno de los Siete Sabios de Grecia.

Existen varias anécdotas sobre su vida. Aristóteles narra que, empleando sus conocimientos astronómicos, Tales predijo cómo sería la cosecha de aceitunas, así que en el invierno compró todas las prensas de aceite de Mileto y Quíos, y en la época de la recolección las alquiló, con lo que acumuló una gran fortuna y demostró la utilidad del saber.

Se dice que Tales fue el primero en dividir el año en estaciones y en 365 días. Además, dio una explicación científica de un eclipse, y el historiador Heródoto narra que predijo a los jónicos el año en que sucedería un eclipse solar, hacia el 585 a. de C.

Tales de Mileto hizo notables contribuciones a la geometría. Llevó de Egipto a Grecia múltiples conocimientos de geometría. Conocía muchas de las bases de la geometría, como el hecho de que cualquier diámetro de un círculo lo dividiría en partes idénticas o las propiedades relacionales entre los ángulos que se forman al cortar dos paralelas por una línea recta perpendicular. Los egipcios habían aplicado algunos de estos conocimientos para la división y parcelación de sus terrenos. Pero Tales se dedicó mucho menos al estudio de las superficies y mucho más a las líneas y a las curvas, con lo que su geometría alcanzó mayor grado de complejidad y abstracción.

Las aportaciones de Tales generaron dos teoremas que llevan su nombre. El primero se refiere al establecimiento de la proporcionalidad entre los segmentos que las rectas paralelas determinan en otras rectas. Se cuenta que Tales aplicó esto al comparar la sombra de un bastón y la sombra de las pirámides de Egipto y medir, por semejanza, la altura de las pirámides de Egipto. El segundo teorema se refiere a que un triángulo que tiene por lado el diámetro de la circunferencia que lo circunscribe es un triángulo rectángulo.

› **Subraya la respuesta correcta y contesta.**

1. ¿Qué opción no representa ámbitos en los que destacó Tales de Mileto?

   A) Comercio y geometría **B)** Astronomía e ingeniería
   C) Ingeniería y comercio **D)** Ingeniería y aritmética

2. ¿Quién narró cómo Tales predijo un eclipse de sol?

   A) Aristóteles **B)** Heródoto **C)** Los jónicos **D)** Quíos

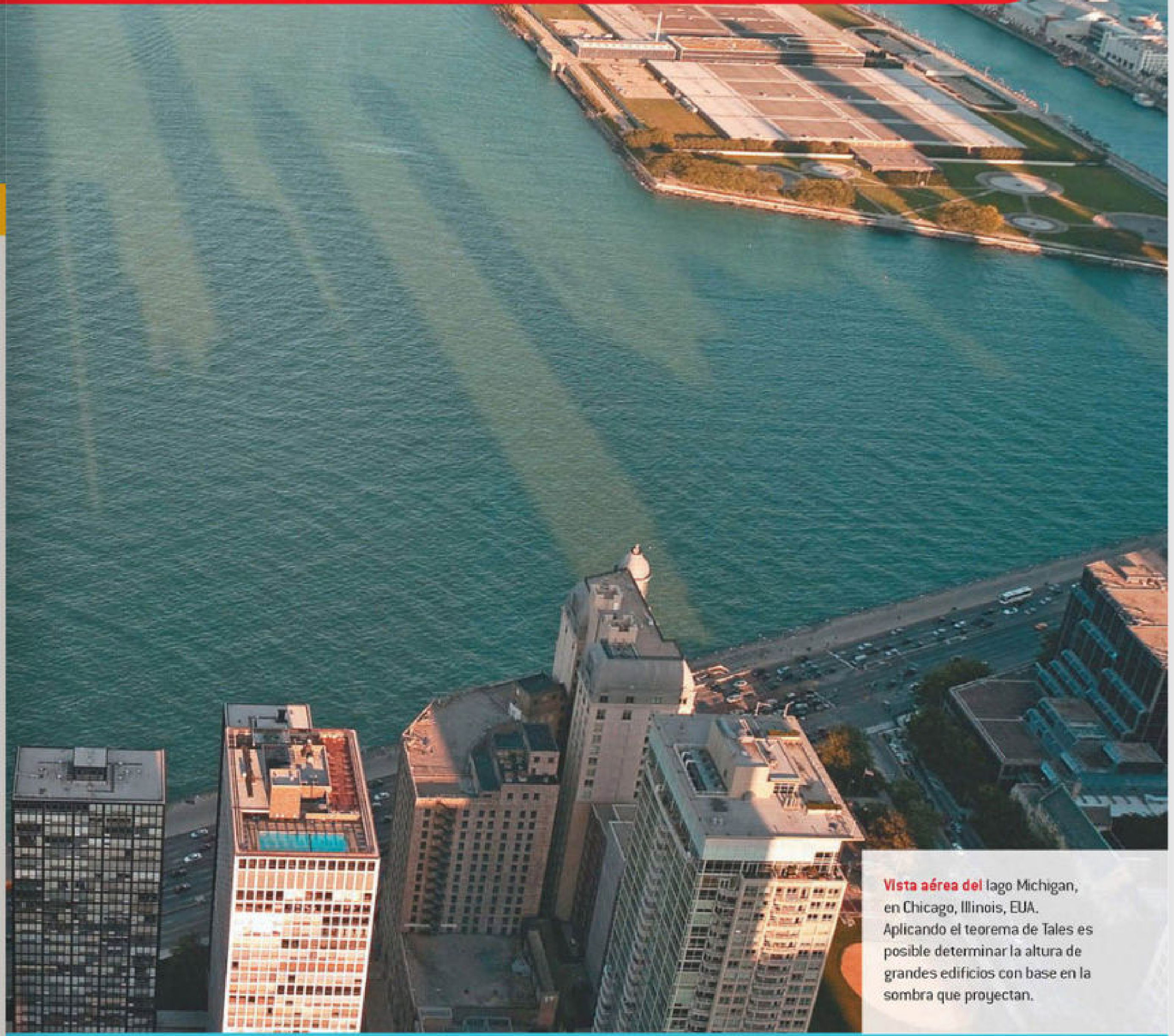
3. Indica dos contribuciones por las que crees que Tales de Mileto es considerado uno de los Siete Sabios de Grecia. ______________________________

   ____

4. ¿Cuál es la diferencia entre la geometría egipcia y la de Tales? ______________________________

   ____

© SANTILLANA



Vista aérea del lago Michigan, en Chicago, Illinois, EUA. Aplicando el teorema de Tales es posible determinar la altura de grandes edificios con base en la sombra que proyectan.

Presentación del bloque

© SANTILLANA

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

14

Ecuaciones de segundo grado

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Ecuaciones cuadráticas

1. Lee la información y resuelve. Justifica tus respuestas.

Raúl se dedica a la fabricación de espejos para decorar interiores, como los que se muestran. En esta ocasión debe entregar un espejo rectangular con una superficie de 9 600 cm², cuyo largo es 40 cm mayor que el ancho, que mide *r* centímetros.

a. Escribe la expresión algebraica que modela la situación. ____________
- Si la expresión anterior se escribe como un trinomio, ¿cuál es la expresión que resulta? Iguálala con cero. ____________
- Si la expresión anterior se factoriza, ¿qué signo deben tener los factores de los binomios? ¿Por qué? ____________
- ¿El término 9 600 tiene raíz cuadrada exacta? Explica. ____________
- ¿Qué condición tienen que cumplir los factores para ser la solución del problema? ____________
- ¿Qué factores obedecen a la condición anterior? ____________

b. Dados los factores del binomio, iguala cada uno con cero y obtén en cada caso los valores que puede adquirir *r*: ____________
- En el contexto del problema, ¿tiene sentido el valor negativo de *r*? Argumenta. ____________
- ¿Cuál de los valores encontrados para *r* se considera para la medida del espejo? ____________
- ¿Cuáles son las dimensiones de largo y ancho del espejo? Justifica. ____________

› Socializa con el grupo tus respuestas. Comenten si creen que exista una manera más simple de resolver ecuaciones cuadráticas, es decir, si hay una fórmula.

2. Lean en pareja la información y resuelvan en su cuaderno.

Ramón trabaja en Tijuana, Baja California; debido a su empleo requiere viajar a Cancún, Quintana Roo. La distancia que hay de una ciudad a otra es aproximadamente de 4 400 km. El vuelo de regreso, de Cancún a Tijuana, fue 60 km/h más rápido que el vuelo de ida. De esta forma Ramón tardó un tiempo total de ida y vuelta de 14 horas.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

a. Consideren que la velocidad se obtiene de la relación $t = \frac{d}{v}$ donde *v* es la velocidad, *d* es la distancia y *t* es el tiempo.
- ¿A qué velocidad viajó el avión de Tijuana a Cancún? Justifiquen.

b. Para determinar la velocidad, es necesario relacionar el tiempo de ida y vuelta con la expresión: $\frac{4400}{v} + \frac{4400}{v+60} = 14$.
- ¿Cómo se obtuvieron los términos de cada lado de la expresión?
- Argumenten y justifiquen por qué de la expresión anterior es posible obtener la siguiente: $\frac{4400(v+60)+440(v)}{v(v+60)} = 14$.
- Si ambos miembros de la expresión anterior se multiplican por $v(v+60)$, ¿qué expresión algebraica resulta?

c. Resuelvan la expresión algebraica de la respuesta anterior e iguálenla con cero.
- ¿Obtuvieron una expresión algebraica de segundo grado? Expliquen.
- A partir de la expresión anterior, ¿es posible que con la factorización se pueda determinar la velocidad solicitada?

› Comparen sus respuestas, lean el siguiente texto y discutan las dudas que surjan.

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas se resuelven por diferentes métodos, algunos son el tanteo y la factorización, sin embargo, cuando las cantidades que se involucran son muy grandes se puede utilizar la **fórmula general** de las ecuaciones cuadráticas, la cual es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde *a*, *b* y *c* son los coeficientes de la ecuación de segundo grado. El signo ± de la fórmula significa que *x* puede obtener hasta dos valores y por ello la expresión se debe resolver para:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

d. Utilicen la fórmula general para resolver la expresión: $14v^2 - 7960v - 264000 = 0$ y de esta última determinen el valor de *a*: ________ *b*: ________ *c*: ________
- ¿Qué valores puede obtener *v*? Expliquen.
- ¿Ambos resultados son positivos?, ¿qué significa ello? Justifiquen.
- ¿Cuáles son los valores de *v*? ¿Cuál es la velocidad del avión en el trayecto Tijuana-Cancún?
- ¿Cuál es la velocidad del avión de Cancún-Tijuana?

e. Lean la siguiente información con la finalidad de enriquecer lo realizado:

Cuando se tiene una ecuación de segundo grado y esta se resuelve a través de la fórmula general, se debe de considerar el signo que antecede a los términos para los valores de los coeficientes ***a***, ***b***, y ***c***.

f. Retomen el problema de la primera actividad de la lección y resuélvanlo con la fórmula general.

› Comparen y contrasten sus respuestas. Comenten las ventajas de resolver una ecuación cuadrática por medio de la fórmula general y registren sus acuerdos.

La fórmula general

3. Reúnanse en equipo y realicen lo que se indica.

a. Encuentren las soluciones de las ecuaciones y completen la tabla.

Ecuación cuadrática	Valor de:	Sustitución de valores en la fórmula $= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Número de soluciones y signo de las mismas
$20w^2 = 20(5w - 6)$	$a =$ $b =$ $c =$		
$x^2 + 4x - 2 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$25d^2 - 70d + 49 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$h^2 + 30h + 200 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$25q^2 + 70q + 49 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		

b. ¿Para cuál o cuáles casos...

- se tienen dos soluciones diferentes con valor negativo? ____________
- se tiene una solución con valor negativo y otra con valor positivo? ____________
- se tienen dos soluciones y ambas con el mismo valor positivo? ____________
- se tienen dos soluciones y ambas con el mismo valor negativo? ____________
- se tienen dos soluciones diferentes con valor positivo? ____________

› Socialicen sus respuestas con el resto del grupo; si es necesario pidan ayuda a su profesor para validar su información.

© SANTILLANA

El discriminante en la fórmula general

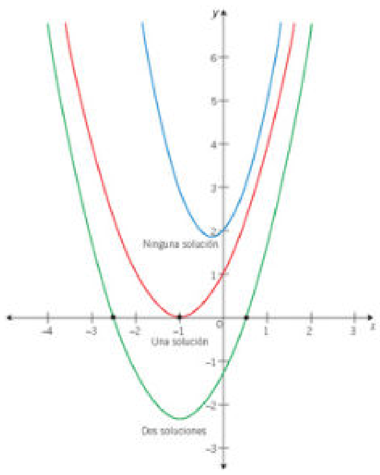
4. Lean la siguiente información y realicen lo que se solicita.

Una ecuación cuadrática puede tener las soluciones que se mencionan en seguida:

- Dos soluciones positivas o dos negativas, o bien, una solución negativa y otra positiva.
- Solo una solución que puede ser positiva o negativa.
- Ninguna solución.

Una manera de anticipar si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, una solución o ninguna solución es encontrar, en la fórmula general, lo que se conoce como el **discriminante** (*D*), siendo $D = b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones; si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación cuadrática tiene una sola solución y si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución. Cuando una expresión algebraica de segundo grado se grafica, como se muestra a la derecha, la curva que se genera interseca al eje de las abscisas (eje *x*) dos veces, una vez o ninguna. A estas intersecciones se les conoce como solución de la ecuación cuadrática o raíces de la ecuación cuadrática.



a. Con base en la información sobre el discriminante, determinen cuáles de las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, una solución o ninguna.

- $2g^2 = -5$
- $j^2 + 6 = 8j$
- $-3a^2 + 8a - 10 = 0$
- $c^2 - 3c = 0$
- $8n^2 - 10n = -10$
- $f^2 = 0$

b. De los resultados que obtuvieron, respondan las siguientes preguntas que refieren al discriminante: $D = b^2 - 4ac$. Justifíquenlas.

- De la expresión $2g^2 = -5$, ¿cuál es el valor del coeficiente *b*? ____________
- Para el caso $c^2 - 3c = 0$, ¿cuál es el valor del coeficiente *c*? ____________
- ¿Es posible que en una ecuación cuadrática el coeficiente del término cuadrático *a* sea cero? ____________

© SANTILLANA

- ¿Qué casos tienen dos soluciones positivas? ____________________
- ¿Cuántas soluciones tiene $8n^2 - 10n = -10$? ____________________
- ¿Qué casos no tienen solución y por qué? ____________________

› Socialicen con el resto del grupo sus respuestas. Si es necesario, pidan ayuda a su profesor para validarlas.

c. Analicen con su profesor la siguiente información y compárenla con los casos en los que determinaron que no hay soluciones.

Cuando es necesario obtener la raíz cuadrada de un número y este es negativo, se dice que no tiene solución en los números reales, siendo estos los números naturales, fraccionarios o decimales, así como los irracionales, tal es el caso de π; es por ello que **si el discriminante es menor que cero, la ecuación de** segundo grado **no tiene solución**.

› Registren sus conclusiones y valídenlas en grupo.

Discriminante y la fórmula general

5. Resuelvan en pareja, en su cuaderno, los siguientes problemas.

a. Germán es biólogo marino y estudia la población de cierta especie de pez. Para estimar la población de este animal para el año 2013, utiliza la expresión algebraica $500t^2 - 600t = 6500$, donde t es el tiempo medido en años. Se prevé que aumente la población y después de un tiempo disminuya como producto de la actividad económica pesquera.

- ¿La expresión que ha modelado Germán es una expresión lineal, cuadrática o de otro tipo? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuántas soluciones tiene la expresión anterior? Justifiquen su respuesta.
- Si utilizan el discriminante para verificar la respuesta anterior, ¿cuáles son los valores que se sustituyen en dicha expresión?
- ¿Para qué año la población de peces será la misma que la estimada en enero de 2013?

b. La diagonal de un terreno rectangular mide 25 m, mientras que el ancho mide 3 m menos que el largo.

- ¿Qué expresión algebraica modela la situación? Expliquen su respuesta.
- La expresión anterior, ¿cuántas soluciones tiene? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuál es el área de dicho terreno?
- ¿Y el perímetro?

c. La altura de un triángulo equilátero es de 22.52 cm.

- Escriban la expresión algebraica que modela el lado del triángulo.
- ¿Cuántas soluciones tiene la expresión algebraica? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuál es la medida de los lados del triangulo?

› Socialicen con el resto del grupo sus respuestas y con la ayuda del profesor verifiquen la veracidad de sus resultados.

© SANTILLANA

6. Reunidos en pareja, realicen lo que se solicita.

a. De las siguientes expresiones algebraicas, determinen por medio del discriminante cuáles no tienen solución y calculen el valor de las que sí tengan.

Ecuación	Solución y justificación
$2x^2 + 3x + \frac{7}{3} = 0$	
$6d(d-1) = 21 - d$	
$8z^2 - z = 0$	
$y^2 = -10$	
$3q^2 = 1$	
$2w^2 + 3w = \frac{7}{3}$	

› Comenten sus respuestas y con la ayuda del profesor verifiquen los resultados.

b. Elijan tres ecuaciones de la tabla y planteen una situación que se pueda modelar con cada una.

- Situación 1: ____________________
- Situación 2: ____________________
- Situación 3: ____________________

› Elaboren en grupo una conclusión sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas. Consideren explicitar las ventajas o desventajas de aplicar la fórmula general para resolverlas.

Reto Ganancias a largo plazo

1. Analiza y resuelve el problema.

Un fabricante de electrodomésticos se ha percatado de que con ciertos distribuidores las ganancias que obtiene no son buenas, porque recupera la inversión a muy largo plazo o no hay ganancia. Por ello, solicitó al área de ventas que modele por qué con algunos distribuidores no hay ganancia y de ello resultó la siguiente ecuación:

$$g = 30e - \left(\frac{1}{10}\right)e^2$$

donde g es la ganancia y e representa los electrodomésticos.

a. ¿La ecuación tiene soluciones? Justifica tu respuesta.
b. ¿Cuántas soluciones hay? Explica por qué.
c. Elabora una conclusión sobre cómo interpretar las soluciones obtenidas.

› Socializa con el resto del grupo tus respuestas y valídalas con ayuda del profesor.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás practicar la resolución de ecuaciones cuadráticas.

http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/Cuad_Eq/cuadeq_home.html

1. Analiza la información que se muestra y cambia los valores que se encuentran en la aplicación para completar tu análisis.
2. Resuelve los problemas de las secciones.

Comparte con tus compañeros tus resultados y valida con ellos la veracidad de tus respuestas. De ser necesario, solicita ayuda a tu profesor. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

15 Congruencia y semejanza de triángulos

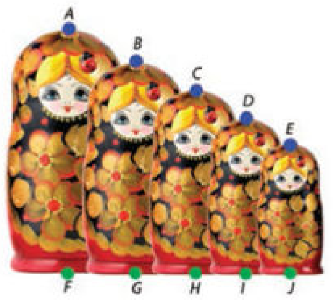
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Una fotografía interesante

1. **En equipo, hagan los trazos y resuelvan.**

Lluvia encontró en Internet una fotografía de unas *matrioskas*, muñecas tradicionales rusas, y le llamó la atención que estas son huecas por dentro, y que cada una en su interior contiene una nueva muñeca. Lluvia dice que las *matrioskas* son semejantes.



a. Hagan los trazos que se indican y confirmen si lo que opina Lluvia es verdad.

- Tracen un segmento de recta que pase por los puntos *ABCDE*.
- Tracen otro segmento que pase por los puntos *FGHIJ*.
- Prolonguen los segmentos hasta que se intersequen. Al punto de intersección llámenlo *P*.
- Tracen los segmentos *AF*, *BG*, *CH*, *DI* y *EJ*.

b. Registren en la tabla los datos de los triángulos que se formaron y analícenlos.

Triángulos	*APF*	*BPG*	*CPH*	*DPI*	*EPJ*
Medida de los lados					
Medida del ángulo con vértice *P*					

- ¿Cómo son los lados de los triángulos? ______
- ¿Cómo son los ángulos de los triángulos? ______
- ¿Cómo son los triángulos que se formaron: semejantes o congruentes? ¿Por qué? ______
- ¿Con base en los datos anteriores se puede afirmar que las muñecas son semejantes? ¿Por qué? ______

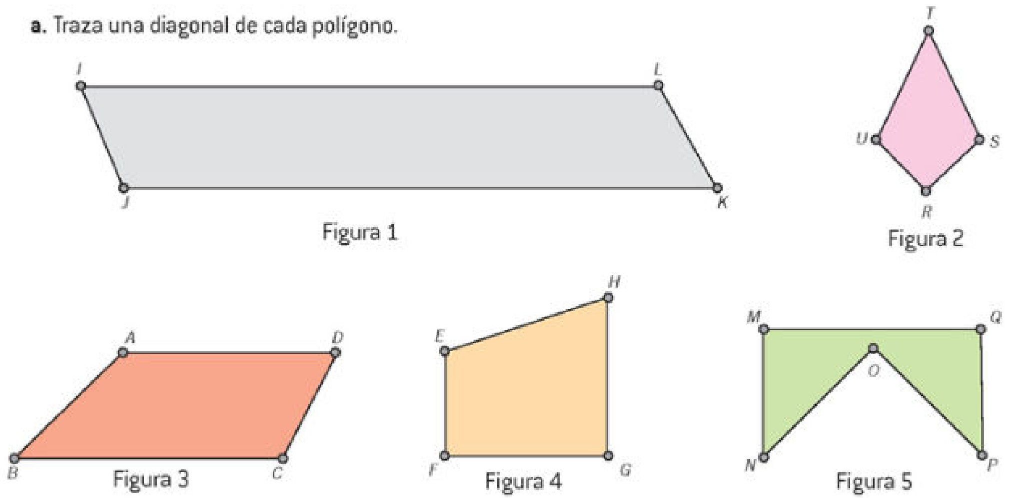
› Socialicen sus respuestas y concluyan qué características tienen los triángulos semejantes.

© SANTILLANA

Semejantes o congruentes

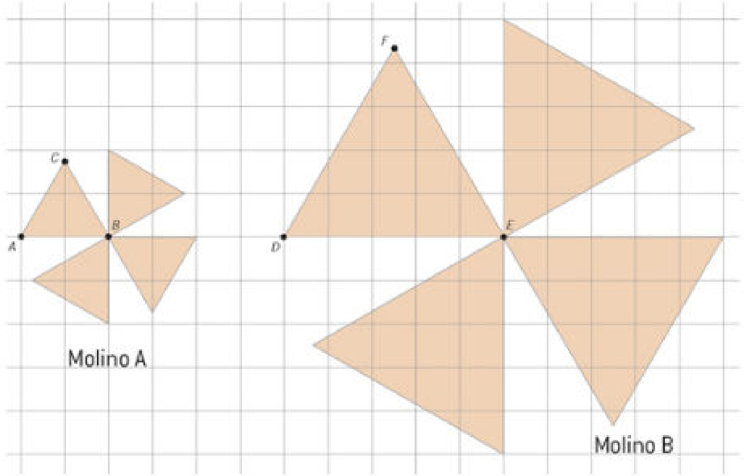
2. **Realiza lo que se solicita.**

a. Traza una diagonal de cada polígono.



b. ¿En cuál de las figuras anteriores, al trazar la diagonal, se formaron dos triángulos congruentes? ______

c. Las siguientes construcciones representan molinos; cada una de ellas se generó a partir de aplicar una rotación a ΔABC y ΔDEF. Determina si son semejantes o congruentes.



- ¿Los triángulos de los molinos A y B tienen lados proporcionales? ¿Por qué? ______
- Traza en la retícula un molino C que tenga como base al $\Delta A_0B_0C_0$, con razón de semejanza $\frac{1}{2}$ respecto del molino A. Justifica por qué tu construcción cumple con la condición solicitada.

© SANTILLANA

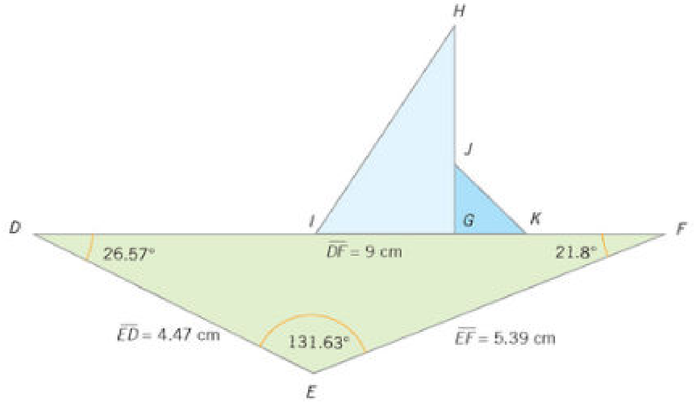
- ¿Cuál es la razón de semejanza del $\Delta A_0B_0C_0$ con respecto de ΔDEF? ____________
- ¿Cuánto mide el perímetro del $\Delta A_0B_0C_0$? ____________
- ¿Los perímetros de los tres triángulos son proporcionales? ¿Por qué? ____________

d. Construye un $\Delta A_2B_2C_2$ que sea semejante a los ya construidos.

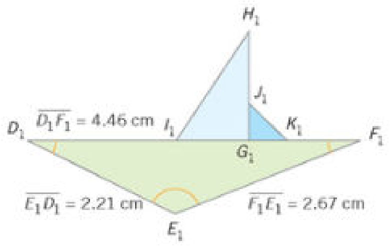
- ¿Cuáles son las medidas de sus lados? ____________
- Determina la razón de semejanza con respecto a los otros molinos.

› Compara tus respuestas con las de tus compañeros, arguméntalas y valídalas con ayuda del profesor.

3. Analiza las construcciones que hicieron dos alumnos de secundaria. Determina si son semejantes.



Submarino 1



Submarino 2

- ¿Cómo son las medidas de los ángulos de ΔDEF y $\Delta D_1E_1F_1$? ____________
- ¿Sus lados son proporcionales? Explica. ____________
- Si las condiciones de semejanza se cumplen para ΔDEF y $\Delta D_1E_1F_1$, ¿qué sucede con ΔHIG y $\Delta H_1I_1G_1$? ____________
- En tu cuaderno, traza un submarino semejante al submarino 1; y otro que sea congruente con el submarino 2.
- ¿Cómo son entre sí todos los submarinos que trazaste? ____________

› Expón tus trazos y respuestas a tus compañeros. Con ayuda del profesor, valídalas.

© SANTILLANA

4. En pareja, hagan los trazos en su cuaderno y validen sus respuestas.

Caso 1. Dos triángulos isósceles *PQR* y *WXZ*, en los que el ángulo desigual mide 36°.

Caso 2. Dos triángulos rectángulos cualesquiera.

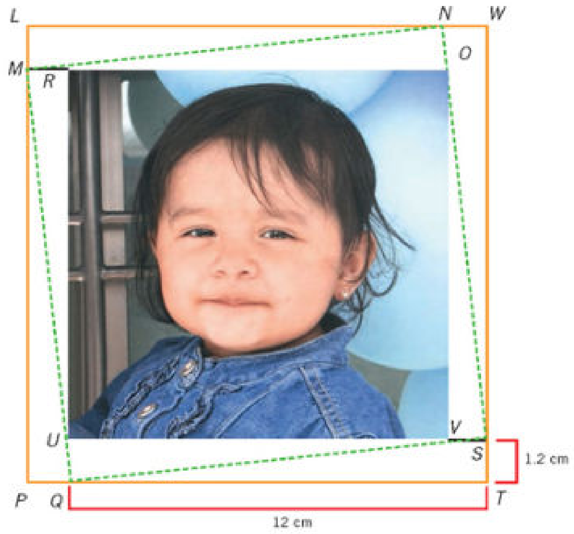
- Analicen los trazos que hicieron y determinen si son semejantes.

› Comenten sus respuestas y, con ayuda del profesor, lleguen a una conclusión.

Problemas de semejanza y congruencia

5. Lee y resuelve.

a. Don Raúl es carpintero y tiene colgada en la pared de su negocio la fotografía de su nieta. A varios clientes les gustó el marco y ya le han hecho pedidos de marcos semejantes.



- ¿Qué características tienen los triángulos que forman el marco? ____________
- ¿Qué triángulos son semejantes al ΔSTQ? Justifica. ____________
- ¿Qué triángulos son congruentes con ΔLMN? Argumenta. ____________

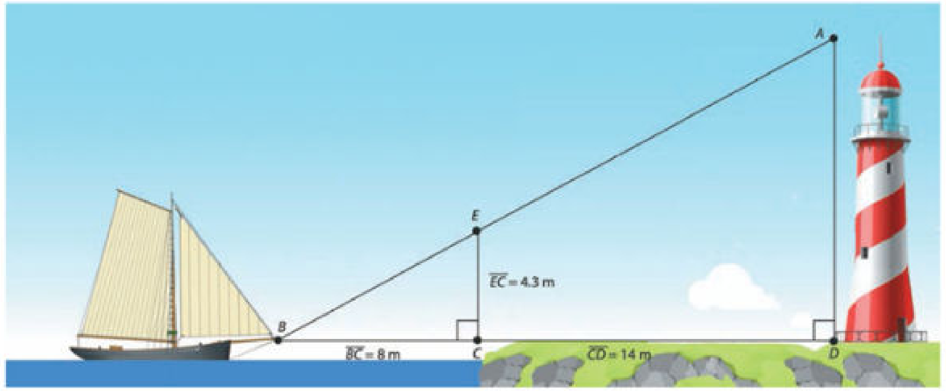
b. Don Raúl anotó en la siguiente tabla algunas de las medidas para elaborar los marcos que le pidieron sus clientes. Complétala.

	Clientes				
	1	2	3	4	5
$\overline{QT}$	17		5		
$\overline{QS}$					
$\overline{ST}$				2.4	
Razón de semejanza		$\frac{5}{6}$			$\frac{3}{4}$

› Explica cómo obtuviste los datos faltantes.

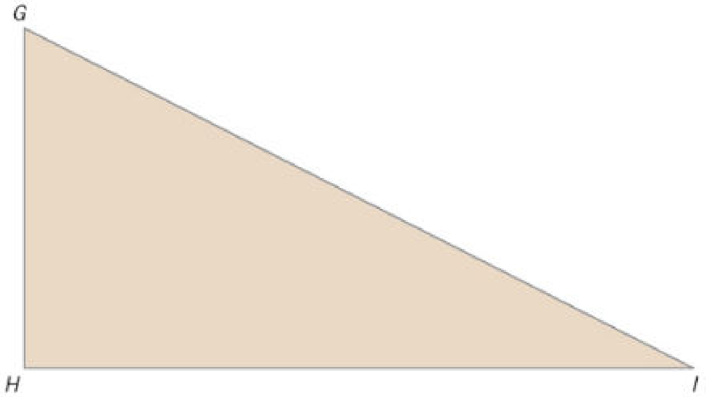
© SANTILLANA

c. En la siguiente representación gráfica se muestra un velero que está navegando cerca de la playa. El $\overline{BC}$ corresponde a la distancia de la playa al velero; $\overline{CD}$ indica la distancia de la playa al faro.



- Calcula la altura del faro. Describe el procedimiento que seguiste. ______
- ¿Cuánto mide el segmento AB? ______
- ¿Cómo son ΔABD y ΔEBC? Justifica tu respuesta. ______

d. Reproduce en tu cuaderno el siguiente triángulo a escala 1:2 y llámalo $G'H'I'$.



- Escribe las medidas de ambos triángulos.

  ΔGHI: ______

  $\Delta G'H'I'$: ______
- ¿Los ΔGHI y $\Delta G'H'I'$ son semejantes? Argumenta tu respuesta. ______

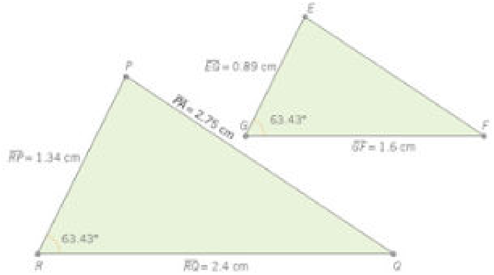
› Comenta tus respuestas con tus compañeros y valídalas con ayuda del profesor.

© SANTILLANA

Otros problemas

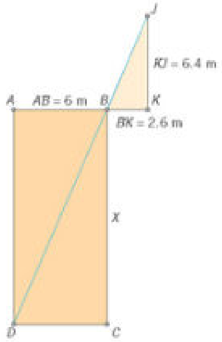
6. En pareja, resuelvan los problemas. Justifiquen sus respuestas.

a. Analicen los triángulos y respondan.



- ¿Cuánto mide el lado EF? ______
- ¿Son proporcionales las medidas de los lados? ______
- ¿Los triángulos son semejantes? ¿Por qué? ______
- Tracen en su cuaderno un triángulo semejante al ΔPQR y uno congruente al ΔEFG.
- ¿Cómo son entre sí todos los triángulos? ¿Por qué? ______
- En su cuaderno, planteen un problema que se pueda resolver con los triángulos PQR y EFG. Intercámbienlo con sus compañeros y resuélvanlo.

b. La figura representa un pozo que tiene 6 m de ancho y se desea conocer su profundidad.



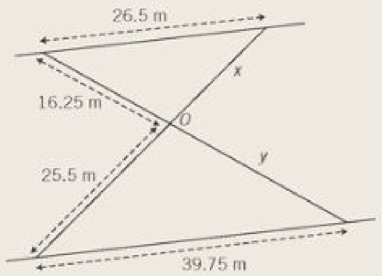
- Un alumno hizo la siguiente construcción para resolver el problema. Analicen la construcción y expliquen por qué el ΔJKB y el ΔBCD son semejantes. ______
- Calculen la profundidad del pozo, usando como referencia el trazo del alumno.
- ¿Cuál es la razón de semejanza de ΔABD y ΔKJB? ______
- ¿Qué distancia hay entre los puntos DJ? ______

› Comenten en grupo los procedimientos que siguieron para resolver los problemas. Mencionen algunos contextos, en los que se requiera aplicar estos criterios.

Reto El problema de los puentes

1. En pareja, resuelvan lo solicitado.

a. Dos caminos que son paralelos entre sí, se unen por dos puentes, los cuales se cruzan por un punto O, como se muestra en la figura de la derecha.



- ¿Cuál es la longitud de x y de y? ______
- ¿Cuál es la longitud total de cada puente? ______

› Comenten en grupo las dificultades o dudas que encontraron y cómo las resolvieron.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás ampliar la información sobre los criterios de congruencia y semejanza de triángulos. Resuelve los problemas propuestos.

portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2/semejanzatriangulos?page=0%2C8

En clase, comparte tus resultados, si te surgieron dudas en los procedimientos que seguiste, pide apoyo al profesor. (consulta: 23 de enero de 2017)

© SANTILLANA

16

El teorema de Tales

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Trazos y relaciones de semejanza

1. **Reúnanse en pareja, hagan los trazos que se indican y respondan.**

a. En el siguiente espacio, tracen un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm y 6 cm. Denoten sus vértices como *ABC*.

- Ubiquen el punto medio del segmento *AB* y nómbrenlo *P*.
- Localicen el punto medio del segmento *AC* y llámenlo *P'*.
- Tracen el segmento *PP'*.
- ¿Cómo son los triángulos *ABC* y *APP'* entre sí? Justifiquen. ____________________
- Ubiquen el punto medio de los segmentos *AP* y *AP'*, y denomínenlos como *Q* y *Q'*.
- Tracen el segmento *QQ'*.
- Encuentren el punto medio de los segmentos *PB* y *P'C* y denomínenlos *R* y *R'*.
- Tracen el segmento *R* y *R'*.
- ¿Cuántos triángulos construyeron? ____________________
- ¿Cómo son los triángulos entre sí? ____________________
- ¿Qué tipo de líneas forman los segmentos *QQ'*, *PP'*, *RR'*? ____________________
- ¿Qué características tienen los triángulos que construyeron? ____________________

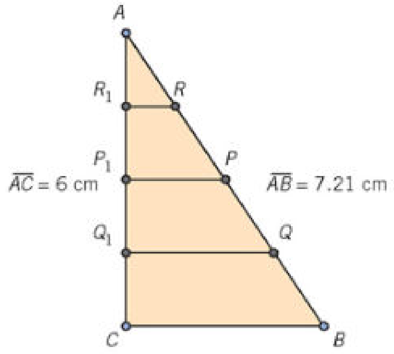
› Expongan sus respuestas al grupo y valídenlas.

© SANTILLANA

2. **Analicen el siguiente enunciado y comprueben su veracidad.**

Dado un triángulo *ABC*, si se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

› Comenten qué procedimientos siguieron para validar la conjetura anterior .



a. Observen la construcción y respondan.

Un estudiante hizo el trazo de la derecha y, con base en este, afirma que los triángulos *ABC* y APP_1 son semejantes.

- Comprueben la conjetura del alumno y escriban el procedimiento que siguieron. ____________________

b. Una manera de probar lo anterior es establecer la proporción entre las medidas de los lados de los triángulos indicados. Recuerden que una proporción es una igualdad entre dos razones y puede expresarse como: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- Establezcan la razón entre los lados *AC* y AP_1. ____________________
- Establezcan la razón entre los lados *AB* y *AP*. ____________________
- Midan los segmentos indicados, sustituyan por sus valores numéricos las razones anteriores y obtengan el cociente. ____________________
- ¿Cuál es la relación entre las razones anteriores? ____________________

c. Midan los siguientes segmentos y establezcan la razón entre ellos.

- $\overline{AR}$ y $\overline{AQ}$ ____________________
- $\overline{AR_1}$ y $\overline{AQ_1}$ ____________________
- ¿Qué relación hay entre las razones de los segmentos? ____________________
- ¿Cuál es la razón de semejanza de los triángulos *ABC* y APP_1? ____________________

d. Establezcan la razón de semejanza entre los siguientes triángulos:

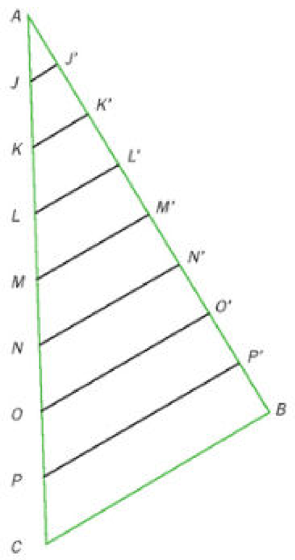
Triángulos	APP_1 y AQQ_1	AQQ_1 y ARR_1
Razón de semejanza		

› Socialicen sus experiencias y argumentos. En grupo registren sus conclusiones acerca de la relación que existe entre los segmentos que se forman entre dos rectas cortadas por varias paralelas.

© SANTILLANA

Segmentos y razones

3. **En pareja, analicen la construcción y respondan lo que se pide. Justifiquen con argumentos geométricos.**



a. Guadalupe hizo el siguiente trazo.

- ¿Cómo son entre sí los triángulos AJJ' y AKK'? ______________________
- Identifiquen todos los triángulos trazados y compárenlos. ¿Cómo son entre sí? Justifiquen su respuesta. ______________________
- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos ABC y $AM'M$? ______
- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos AMM' y AKK'? ______
- ¿Cómo son entre sí $\overline{JJ'}$, $\overline{KK'}$, $\overline{LL'}$, $\overline{MM'}$, $\overline{NN'}$, $\overline{OO'}$, $\overline{PP'}$ y $\overline{CB}$? Justifiquen su respuesta. ______________________

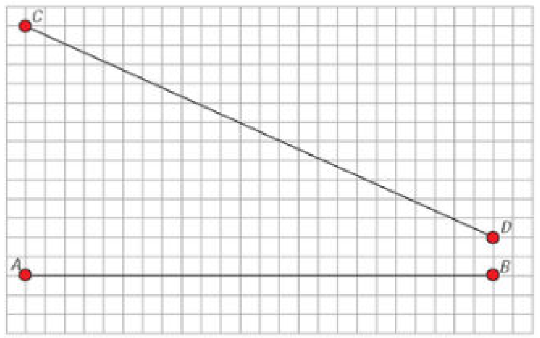
b. Guadalupe afirma que la razón entre la medida de $\overline{AM}$ con respecto de $\overline{AC}$ es $\frac{1}{2}$. ¿Están de acuerdo con Guadalupe? ______________________

- ¿Cuál es la relación entre $\overline{AM'}$ y $\overline{AB}$? ______________________
- ¿Qué relación hay entre las razones anteriores?
- ¿Cuál es la razón entre $\overline{AJ}$ y $\overline{AC}$ entre $\overline{AJ'}$ y $\overline{AB}$? ¿Qué observan? ______

› Socialicen lo que han realizado. En caso de que tengan dudas, soliciten el apoyo de su profesor. Después registren las conclusiones obtenidas.

4. **Haz los trazos y resuelve.**

a. Sigue los pasos y responde.



- Mide los segmentos AB y CD.
- Ubica el punto medio del $\overline{AB}$ y llámalo O.
- Traza una recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por el punto O y que interseque a $\overline{CD}$, llámala R_1. Nombra O' al punto donde se intersecan.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

- Divide $\overline{AO}$ en cuatro partes iguales.
- Nombra como R, S y T a cada uno de los puntos sobre la recta.
- Para cada punto R, S y T, traza una recta que atraviese $\overline{CD}$ que sea paralela a R_1; denomina cada recta como R_2, R_3 y R_4.
- A los puntos de intersección del segmento CD con las rectas, denomínalos como R', S' y T', respectivamente.
- Traza una recta R_5 que pase por los puntos A y C.

b. Calcula la razón entre los segmentos. Utiliza tu regla para medirlos.

$\frac{\overline{AR}}{\overline{CR'}} = \boxed{}$ $\frac{\overline{AS}}{\overline{CS'}} = \boxed{}$ $\frac{\overline{AT}}{\overline{CT'}} = \boxed{}$

$\frac{\overline{AO}}{\overline{CO'}} = \boxed{}$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \boxed{}$

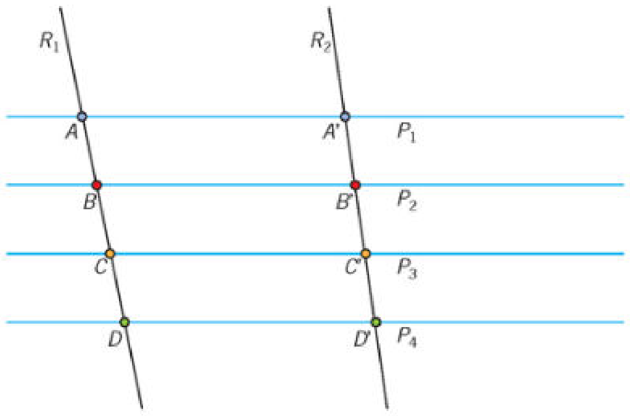
- ¿Cómo son entre sí las razones obtenidas? ______________________
- Si se traza un segmento paralelo PP' a los anteriores y la distancia de AP es de 7 cm, ¿cómo puedes determinar la longitud de $\overline{CP'}$? ______________________
- ¿Cuánto mide $\overline{CP'}$? ______________________

› Comenta en grupo tus resultados con argumentos. Considera con ellos la siguiente información para que lleguen a acuerdos.

Teorema de Tales

Si se cortan dos rectas transversales por varias rectas paralelas, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

Por tanto: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$



5. **En pareja, analicen el trazo y completen los enunciados.**

a. Son rectas paralelas: ______________________

b. Son rectas transversales: ______________________

c. Calcula la razón entre los segmentos. Mide con tu regla la longitud de los segmentos en milímetros.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \boxed{}$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \boxed{}$ $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \boxed{}$ $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \boxed{}$

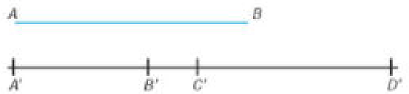
d. $\overline{AB}$ es ____________ a $\overline{A'B'}$, porque ______________________

› Comparen sus respuestas con las que obtuvieron otras parejas. Expliquen sus procedimientos y valídenlas con ayuda del profesor.

Aplicación del teorema de Tales en diversos problemas

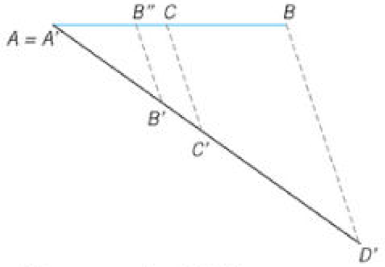
6. En pareja, resuelvan los problemas.

Osiris necesita dividir una solera ($\overline{AB}$) en partes proporcionales a las representadas en $\overline{A'D'}$, tal y como se muestra en la construcción:



a. Discutan y propongan un procedimiento para resolver el problema aplicando lo estudiado. ________________

b. Osiris hizo el siguiente trazo para dividir la solera.



- Describan el procedimiento que siguió Osiris. ________________
- ¿Cómo son entre sí $\overline{D'B}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{B'B''}$? ________________
- ¿Estas líneas cortan $\overline{AB}$ en los puntos B'' y C? ¿Por qué? ________________
- Por el teorema de Tales se cumple que: $\frac{AB''}{A'B'}$ = ______ = ______ .

c. En su cuaderno, tracen un segmento AB. Utilicen el teorema de Tales para dividirlo en siete partes iguales. Sigan el procedimiento.

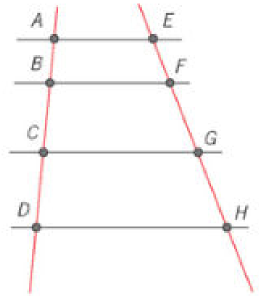
- Tracen un nuevo segmento que pase por el punto A.
- Con el compás, con centro en A, tracen un arco que interseque al nuevo segmento.
- Con centro en el punto de intersección anterior, tracen otro arco, con la misma apertura del compás. Repitan lo anterior siete veces. Al último punto llámenlo C.
- Unan los puntos B y C. Apóyate en los trazos anteriores y divide el segmento AB en siete partes iguales.
- Argumenten por qué en su construcción los segmentos resultantes son iguales.

____

© SANTILLANA

© SANTILLANA

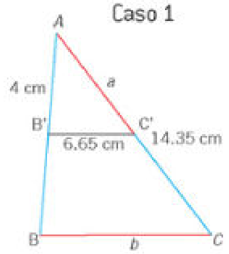
d. Joshua afir a que las rectas negras son paralelas. Hagan lo que se indica y comprueben si lo que dice es correcto.



- Si $\overline{AB}$ = 5 cm, $\overline{CD}$ = 15 y $\overline{GH}$ = 24 cm, ¿cuánto mide $\overline{EF}$? __________
- Si los valores fueran: $\overline{FG}$ = 6 cm, $\overline{CD}$ = 21 cm y $\overline{GH}$ = 18 cm, ¿cuánto mediría $\overline{BC}$? __________
- Si los valores fueran: $\overline{EF}$ = 20 cm, $\overline{DC}$ = 50 cm y $\overline{AB}$ = 40 cm, ¿cuánto mediría $\overline{GH}$? __________
- Si los valores fueran: $\overline{FG}$ = 21 cm, $\overline{AB}$ = 15 cm y $\overline{BC}$ = 30 cm, ¿cuánto mediría $\overline{EF}$? __________

e. Apliquen el teorema de Tales y encuentren las medidas de los segmentos a y b para cada uno de los siguientes casos.

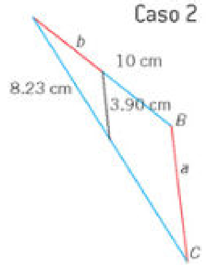
Caso 1



Segmento a: ______

Segmento b: ______

Caso 2



Segmento a: ______

Segmento b: ______

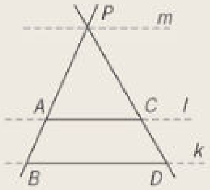
- Busquen una aplicación del teorema de Tales y con los datos que recaben, planteen un problema. Intercámbienlo con sus compañeros y resuélvanlo.

› En grupo, comenten las aplicaciones del teorema de Tales y registren sus conclusiones.

Reto — Medidas de los segmentos

1. Reunidos en pareja, hagan lo que se pide.

Al triángulo PDB lo intersecan las rectas m, l y k.



a. Consideren las medidas de los segmentos dados y encuentren el valor que se piden en cada caso.

- Si $\overline{PB}$ = 12 cm, $\overline{PC}$ = 10 cm y $\overline{CD}$ = 5 cm, ¿cuánto mide $\overline{AB}$? __________
- Si $\overline{PC}$ = 18 cm, $\overline{BP}$ = 30 cm y $\overline{PD}$ = 27 cm, ¿cuánto es la medida de $\overline{AP}$? ______
- Si $\overline{PC}$ = 16 cm, $\overline{AP}$ = 24 cm y $\overline{PB}$ = 54 cm, ¿cuánto mide $\overline{DP}$? __________

› Comenten sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas en grupo.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás ampliar la información sobre el teorema de Tales.

mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/semej2.htm

Visita la siguiente página y lee.

www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html

Discute con tus compañeros la información que se encuentra en la página y analicen los ejemplos propuestos. Realiza las actividades.

Comparte tus experiencias en clase y consulta las dudas con el profesor.

(consulta: 27 de diciembre de 2016)

17

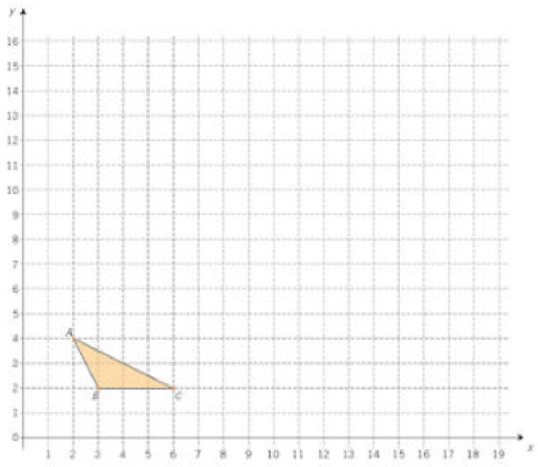
Figuras homotéticas

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Homotecia y semejanza

1. En pareja, analicen el triángulo y respondan.



a. Localicen los vértices del triángulo y escriban las coordenadas de cada uno. ______________________

- Multipliquen por 2 las coordenadas de los vértices del ΔABC. Escriban las coordenadas que obtuvieron. ______________________
- Unan los puntos de las coordenadas y tracen el $\Delta A'B'C'$.
- Tracen un segmento que una los puntos A y A'; otro que una los puntos B y B' y unan con otro segmento los puntos C y C'.
- Prolonguen los segmentos hasta que se intersequen. ¿En qué coordenada se intersecaron? ______________________
- ¿Qué características tienen los lados AB y $A'B'$? ¿Y los lados BC y $B'C'$? ______________________
- ¿Qué propiedades del ΔABC se mantienen en el $\Delta A'B'C'$? ______________________

b. Midan $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$; $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$; $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. Obtengan los siguientes cocientes.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{BC}{B'C'} = \frac{\square}{\square}$

- ¿Qué relación hay entre los cocientes de las longitudes de los lados correspondientes del ΔABC y del $\Delta A'B'C'$? ______________________

c. Midan $\overline{AA'}$, $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{CC'}$, $\overline{OB}$ y $\overline{BB'}$, luego respondan.

- ¿Qué relación hay entre las medidas de $\overline{AA'}$ y $\overline{OA}$? ______________________
- ¿Cómo es $\overline{OC}$ respecto de $\overline{CC'}$? ______________________
- ¿Cómo es $\overline{OB}$ respecto de $\overline{BB'}$? ______________________

© SANTILLANA

- ¿Qué relación hay entre la distancia que guarda el punto donde se intersecan los segmentos con dos puntos correspondientes de los polígonos? ______________________

d. Lean la información y respondan.

Cuando las rectas que unen los vértices correspondientes de dos polígonos se cortan en un punto fijo o **centro de homotecia**, se dice que los polígonos son homotéticos.
En una homotecia los segmentos correspondientes de las figuras son paralelos.
El número por el que se multiplica la distancia del centro de homotecia al vértice de la figura original se denomina **factor de homotecia**.
Si el factor o la razón de homotecia es mayor que cero y menor que uno $(0 < k < 1)$ se trata de una reducción.
Si k es mayor que uno $(k > 1)$, entonces se trata de una ampliación.

e. Con base en la información anterior, determinen:

- el centro de homotecia de ΔABC y $\Delta A'B'C'$. ______________________
- la razón de homotecia de ΔABC y $\Delta A'B'C'$. ______________________
- En el plano cartesiano de la página anterior, tracen una figura homotética a ΔABC con razón de homotecia 3, cuyo centro de homotecia sea $(0, 0)$.

› Comenten sus respuestas y procedimientos con sus compañeros.

2. Tracen, en el plano cartesiano una figura homotética de *ABCDE* a partir el vértice B'. Consideren como centro de homotecia el origen.

a. Respondan.

- ¿Qué propiedades del pentágono $ABCDE$ se conservaron en el pentángono $A'B'C'D'E'$? ______________________

b. Calculen el cociente de las razones.

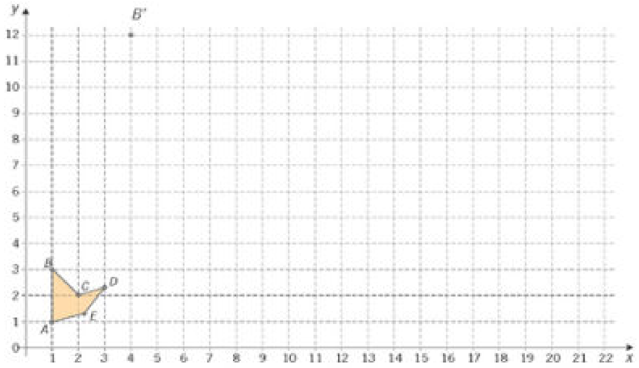
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{B'C'}{BC} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{C'D'}{CD} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{D'E'}{DE} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{E'A'}{EA} = \frac{\square}{\square}$



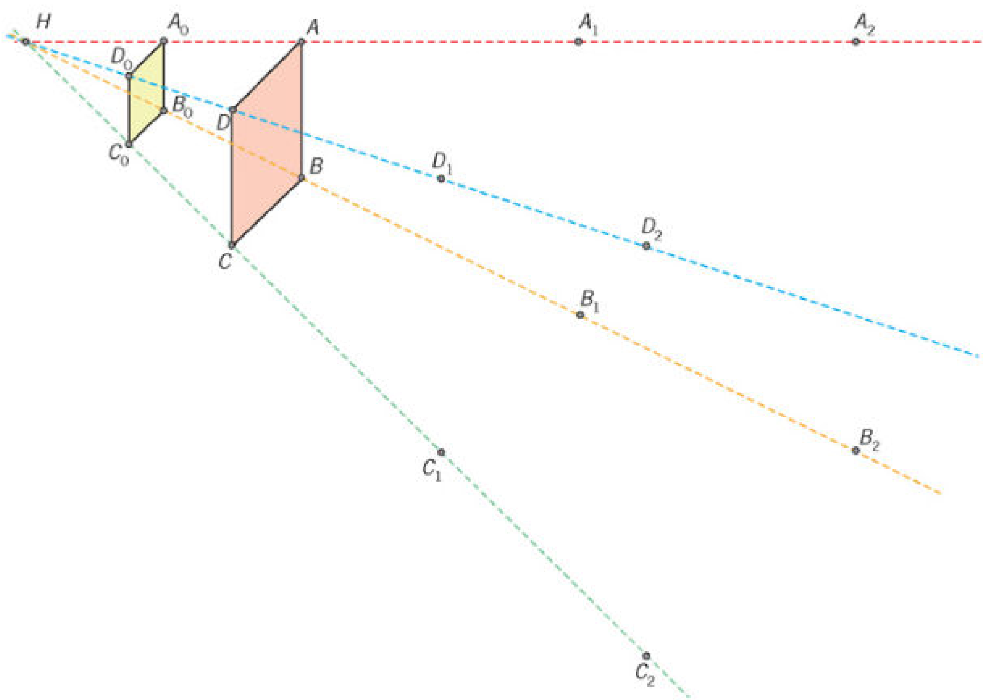
- ¿Qué relación hay entre los resultados? ______________________
- ¿Cuál es la razón de homotecia? ______________________

› Comenten sus resultados con sus compañeros y, con ayuda del profesor, concluyan.

© SANTILLANA

Construcción de figuras homotéticas con compás

3. Reúnanse en pareja para realizar lo que se solicita.



a. Tracen los segmentos que pasen por los puntos A_1, B_1, C_1, D_1 y A_2, B_2, C_2, D_2 para formar los polígonos correspondientes.

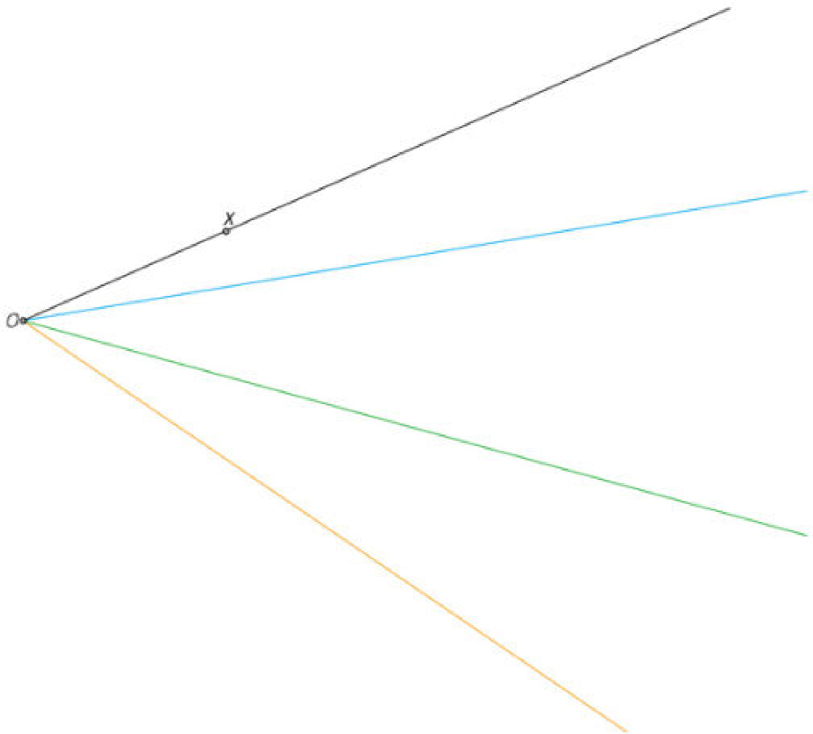
- ¿Cómo son los polígonos que trazaron respecto del polígono original *ABCD*? ____
- Usen su compás para determinar la razón de homotecia de los polígonos.
- ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono *ABCD* y del polígono $A_1B_1C_1D_1$? Expliquen el procedimiento que siguieron. ____
- ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono *ABCD* y del polígono $A_2B_2C_2D_2$? ____
- ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono $A_2B_2C_2D_2$ y del $A_1B_1C_1D_1$? ¿Y con $A_0B_0C_0D_0$? ____
- ¿Qué propiedades del polígono $A_2B_2C_2D_2$ se conservan en el polígono $A_1B_1C_1D_1$? ____
- ¿Las figuras homotéticas son semejantes? Argumenten. ____

› Socialicen sus respuestas y argumentos. Después registren sus conclusiones.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

b. Tracen una semicircunferencia con origen en el punto *O*, con radio *x* y que interseque a las cuatro semirrectas.



- Ubiquen los puntos de intersección de la circunferencia y las semirrectas para formar un polígono y llámenlos *x, y, z, w*.
- ¿Qué tipo de polígono se formó? ____

c. Nombren al polígono que trazaron como polígono original y, utilizando únicamente compás, determinen:

- ¿Qué características debe cumplir un polígono $x_0y_0z_0w_0$ respecto del original para que la razón de homotecia sea $\frac{1}{2}$? ____
- Tracen el polígono $x_0y_0z_0w_0$ que cumpla la condición anterior.
- ¿Qué características debe tener un polígono $x_1y_1z_1w_1$ respecto del original para que la razón de homotecia sea 3? ____
- Tracen el polígono $x_1y_1z_1w_1$ que cumpla la condición anterior.
- ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono $x_0y_0z_0w_0$ respecto del polígono $x_1y_1z_1w_1$? ____
- ¿Qué propiedades del polígono $x_0y_0z_0w_0$ en relación con el original se conservan? ____

d. Analicen la figura y realice lo que se indica.

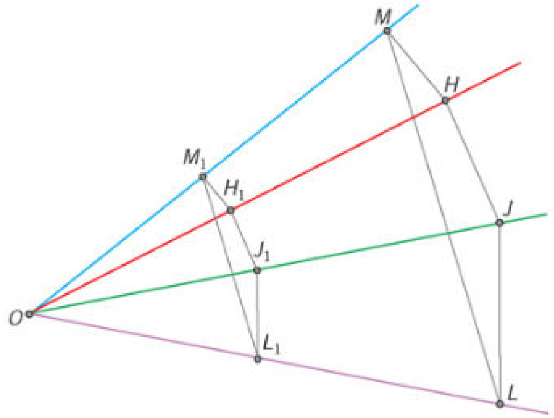
- Tracen semirrectas con origen en Z de manera que cada una pase por los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I.
- Hagan una figura cuya razón de homotecia sea $\frac{1}{3}$ respecto de la original.

› Presenten sus trazos a sus compañeros y expongan el procedimiento que siguieron. Analicen cómo son las figuras de los demás; si son diferentes, comenten a qué se debe esto.

Figuras homotéticas con razón menor que 1

4. **Reúnanse en equipos y hagan lo que se solicita.**

a. En la siguiente figura se muestran dos cuadriláteros homotéticos.



- ¿Cuánto mide $\overline{OM}$? ______
- ¿Cuánto mide $\overline{OM_1}$? ______
- ¿Cuál es el cociente $\frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}}$? ______
- Calculen la razón de los segmentos $\frac{\overline{OH_1}}{\overline{OH}}$, $\frac{\overline{OJ_1}}{\overline{OJ}}$, $\frac{\overline{OL_1}}{\overline{OL}}$. ______
- ¿Cuál es la razón de homotecia de $M_1H_1J_1L_1$ respecto de $MHJL$? ______
- Si O es el centro de la homotecia, ¿se puede obtener una figura cuya razón de homotecia tenga valores negativos? ¿Por qué? ______

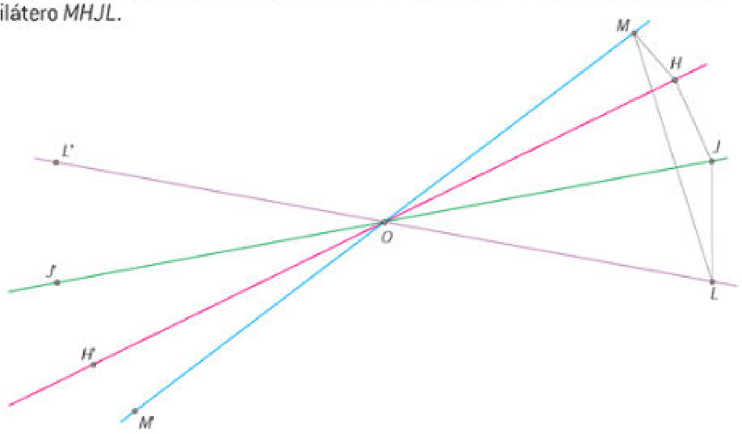
› Hagan los trazos necesarios y validen su respuesta.

© SANTILLANA

b. Lee la información y realiza lo que se te indica.

Cuando la razón de homotecia es menor que cero se considera una homotecia negativa.

- En la siguiente imagen, el punto O es el centro de homotecia. La figura original es el cuadrilátero $MHJL$.



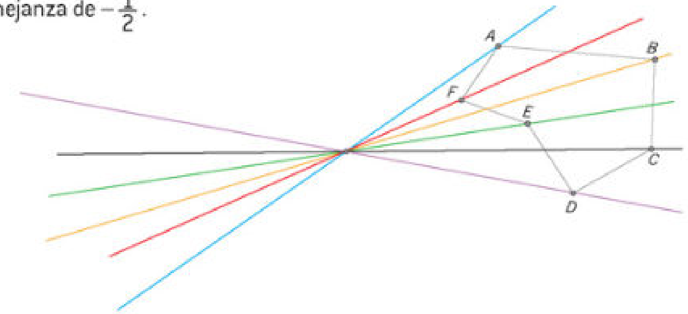
- ¿Cuánto miden $\overline{OM}$ y $\overline{OM'}$? ______
- Obtengan la razón de:

$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{\overline{OH'}}{\overline{OH}} = \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{\overline{OJ'}}{\overline{OJ}} = \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{\overline{OL'}}{\overline{OL}} = \frac{\square}{\square}$

- Tracen $\overline{M'H'}$, $\overline{H'J'}$, $\overline{J'L'}$, $\overline{L'M'}$ y respondan.
- Con base en los resultados que obtuvieron determinen la razón de homotecia. Justifiquen su respuesta. ______
- Si se aplicara una razón negativa a $M'H'J'L'$, ¿qué ocurriría con la imagen homotética? ______

› Verifiquen respuestas y registren sus acuerdos.

c. Tracen un polígono $A'B'C'D'E'F'$ homotético al polígono $ABCDEF$ que tenga una razón de semejanza de $-\frac{1}{2}$.

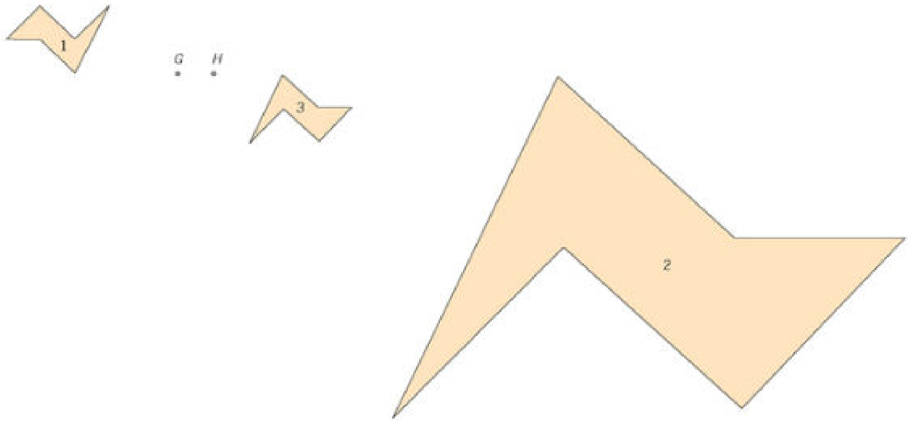


- Tracen un polígono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ homotético al polígono $ABCDEF$ que tenga una razón de homotecia $\frac{1}{4}$.

› Expongan el procedimiento que siguieron para realizar los trazos de los polígonos y validen sus construcciones con argumentos geométricos.

© SANTILLANA

d. A partir de una de las figuras, se trazaron dos figuras homotéticas. Identifiquen el polígono original y nombren sus vértices como *ABCDEF*. Consideren los puntos *G* y *H* como centros de homotecia.



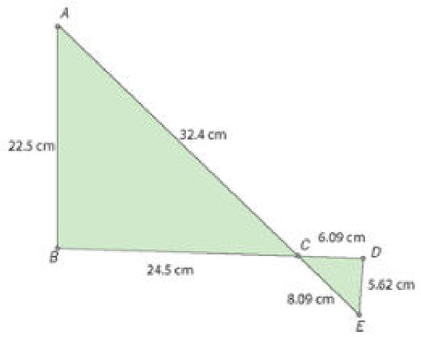
- ¿Qué figuras tienen como centro de la homotecia el punto *H*? ____________
- ¿Cuál es la razón de homotecia? ____________
- ¿Cuál es la razón de homotecia con respecto al otro polígono? ____________
- Determinen un centro de homotecia para los polígonos homotéticos? ¿Cuál sería la razón de homotecia? ____________

› Comenten en grupo sus respuestas y valídenlas.

¿Cuál es cuál?

5. De manera individual, realiza lo que se pide.

a. Determina si los triángulos de la construcción son homotéticos. De serlo, calcula el centro y la razón de homotecia.



b. Construye una figura homotética al ΔABC cuya razón de homotecia sea mayor que 1, y otra que sea menor que −1.

c. Explica qué características permanecen invariables en las construcciones homotéticas y cuáles cambian. Usa tus trazos para argumentar tus respuestas.

› Compara con tus compañeros tus construcciones y valídenlas en grupo.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

6. Analiza los textos y marca en la columna "Falso" (F) o "Verdadero" (V), según sea el caso.

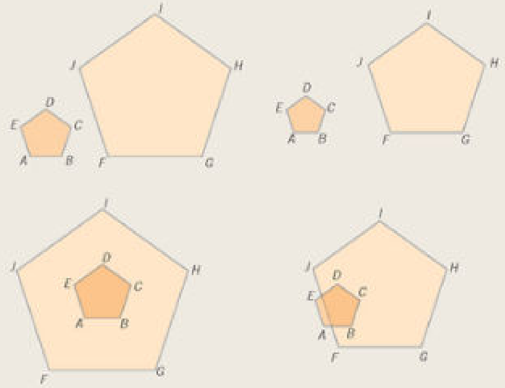
Afirmación	Falso (F)	Verdadero (V)
El centro de homotecia es el punto donde concurren las rectas que determinan los puntos de una figura, pero no sus lados correspondientes.		
La razón de homotecia de dos figuras se obtiene calculando el cociente de *OA* y *OA'*, siendo *A* un punto cualquiera y *O* el centro de homotecia. El signo de esta dependerá de la posición de *O* respecto de *A* y *A'*.		
Una homotecia transforma un polígono hexagonal regular, si se utiliza un factor de homotecia que afecte los ángulos internos de dicho hexágono.		

› Socializa tus respuestas con el grupo y en conjunto reescriban, en su cuaderno, los enunciados que no son verdaderos.

Reto Homotecias

1. De manera individual, realiza lo que se pide.

a. Analiza la siguiente familia de pentágonos.



- Encuentra la razón de la homotecia y explica si alguna de ellas es producto de una razón que es igual, menor o mayor que 1 o que −1.
- Mide los lados de los pentágonos en cada caso y obtén la razón de homotecia correspondiente.

b. Retoma la construcción anterior y plantea un problema que se resuelva con esta.

› Socializa tus respuestas y registra los acuerdos del grupo. Si hay dudas, coméntalas con la fi alidad de solucionarlas.

Apoyo tecnológico

En esta dirección hay diversos ejercicios, resuélvelos y practica lo aprendido a lo largo de la lección.
https://www.geogebra.org/m/FjZAapFd
Discute con tus compañeros la información que se encuentra en las páginas y analiza con ellos los ejemplos propuestos.
(consulta: 27 de diciembre de 2016)

18

Gráficas de funciones cuadráticas

Eje: Manejo de la información
Tema: Proporcionalidad y funciones

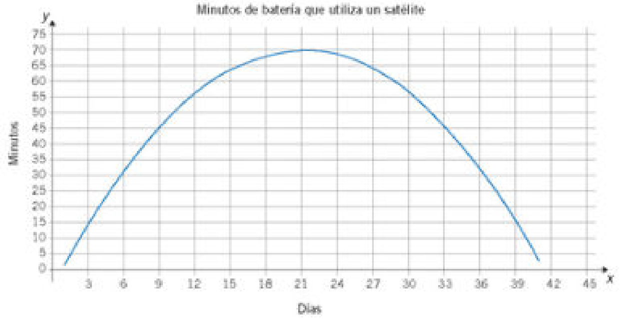
Contenido: Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Equinoccios, satélites y las funciones cuadráticas

1. **Analiza la información, realiza y responde lo que se solicita.**

Alejandro es ingeniero en Comunicaciones y Electrónica y su especialidad son las comunicaciones satelitales; trabaja para una compañía internacional que se dedica a fabricar satélites que se venden a diferentes países. Debido a que estos aparatos funcionan con celdas solares, Alejandro diseña las baterías de respaldo que los integran, las cuales se cargan a través de paneles solares que se activan cuando la Tierra o la Luna se interponen entre el Sol y el satélite; es decir, cuando ocurren eclipses; algunos de estos fenómenos son los equinoccios de primavera o de otoño.

El ingeniero usa la siguiente gráfica para modelar los minutos que el satélite debe utilizar las baterías de respaldo durante el equinoccio de primavera.



a. Analízala y responde lo que se solicita.

- ¿Qué día utiliza más minutos de batería? ¿Cuántos minutos? ______

b. Aproximadamente, ¿cuántos días se emplean las baterías de respaldo? ______

- ¿En qué días usan, aproximadamente, 45 minutos de batería? ______

c. ¿Qué tipo de función representa la gráfica? Justifica tu respuesta. ______

d. ¿Cuál de las siguientes funciones corresponde con la gráfica? Argumenta. ______

- $m(d) = 0.17d + 7.17d - 5.5$
- $m(d) = 0.17d^2 + 7.17d - 5.5$
- $m(d) = -0.17d^2 + 7.17d - 5.5$

› Compara tus respuestas y tu argumetación con las de otros compañeros, si existen dudas o diferencias, coméntenlas en grupo con la idea de resolverlas.

© SANTILLANA

Función de una gráfica

2. **Reúnete con un compañero, retomen el problema anterior y resuelvan.**

a. Con base en la expresión que modela la gráfica, completen la tabla: sustituyan d por el valor que se indica y verifiquen la relación de la gráfica con la expresión algebraica.

d	$m(d)$	d	$m(d)$	d	$m(d)$	d	$m(d)$
1		10		21		32	
2		12		22		34	
3		14		24		36	
4		16		26		38	
6		18		28		42	

- ¿Cuál de las expresiones de la página anterior no representa una función cuadrática? Justifiquen. ______

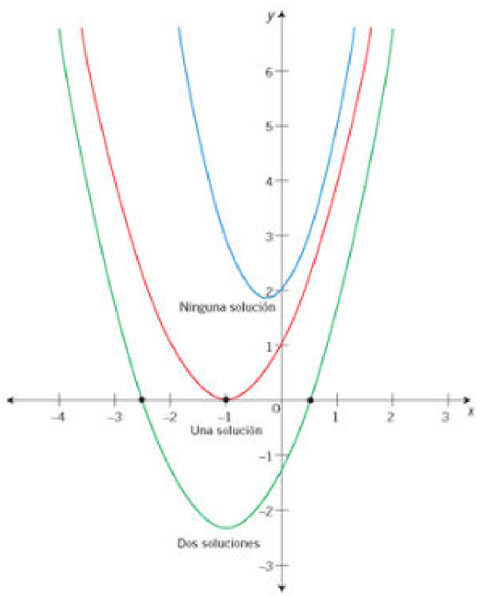
b. Con base en los primeros diez valores propuestos en las tablas, elaboren en el cuaderno una tabla para determinar el comportamiento de la función $m(d) = 0.17d^2 + 7.17d - 5.5$ y tracen la gráfica correspondiente en el plano de la página anterior.

- Comparen ambas gráficas. ¿Qué aspecto las hace diferentes? ______

c. Analicen la siguiente información y respondan las preguntas.

Cuando una expresión algebraica de segundo grado se grafica, como se muestra a la derecha, la curva que se genera interseca al eje de las abscisas (eje x) dos veces, una vez o ninguna. A estas intersecciones se les conoce como **solución de la ecuación cuadrática o raíces de la ecuación cuadrática**.

Se tiene una función cuadrática cuando esta tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, además a no puede ser cero y x es la variable independiente. A la función cuadrática también se le conoce como función polinomial de segundo grado.



- Si el coeficiente a fuera igual a cero, ¿qué tipo de función se obtendría? ______
- Con base en la información teórica, de las siguientes funciones $f(x) = ax^2 + bx$, $f(x) = ax^2 + c$ y $f(x) = ax^2$, ¿alguna no representa una función cuadrática? Expliquen qué hace diferente una expresión de la otra. ______

› Socialicen sus argumentos en grupo y con ayuda del profesor valídenlos.

© SANTILLANA

Funciones cuadráticas en inversiones

3. **Reunidos en pareja, analicen la siguiente información y respondan lo que se solicita, justificando cada respuesta.**

Raúl es oriundo de León, Guanajuato, y se dedica a la fabricación de calzado. Para realizar un tipo especial de zapatos, debe hacer una fuerte inversión de capital, por lo que solicitó ayuda a su hijo Jesús, quien es actuario. Jesús investigó para dar su punto de vista y utilizó las siguientes expresiones para determinar:

Glosario

ingreso bruto. Son todas las percepciones que se tienen sin considerar los gastos e impuestos.

- el *precio según la demanda* (p_d): $p_d = 700 - 0.02x$
- el ***ingreso bruto*** (i_b): $i_b = xp_d$
- los *costos de producción* (c_p): $c_p = 100x + 1000000$
- la *ganancia* (g): $g = x(700 - 0.02x) - (100x + 1000000)$

En las expresiones, la literal x representa los pares de zapatos.

a. En la primera expresión x representa el número de pares de zapatos vendidos, el cual debe ser mayor que cero, pero menor que 35 000 $(0 < x < 35000)$. Además de que el precio máximo que pagaría una persona sería de 700 pesos. Si P_d la escriben en función de x, es decir $p_d(x) = 700 - 0.02x$

- ¿Es esta una función cuadrática? ¿Por qué? ______
- Elaboren en su cuaderno una gráfica de la función anterior, utilicen valores para x de 0, 2 500, 5 000, ..., 35 000.
- ¿Qué tipo de función es? ______

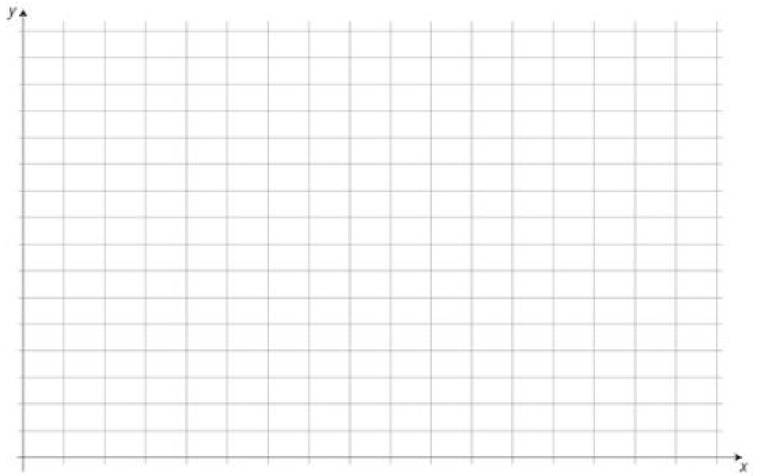
b. La segunda expresión representa el producto del número de pares de zapatos por el precio en que se vendan, según la demanda. Si i_b se escribe en función de x, es decir, $i_b(x) = x(p_d)$

- ¿Es esta una función cuadrática? Escriban la función de tal forma que se muestre el término cuadrático. ______
- Con base en la función $i_b(x) = xp_d$, completen la siguiente tabla. Si lo consideran pertinente, utilicen calculadora:

x	$i_b(x) = x(700 - 0.02x) = 700x - 0.02x^2$	x	$i_b(x) = x(700 - 0.02x) = 700x - 0.02x^2$
0	$i_b =$	17 500	$i_b =$
2 500	$i_b =$	20 000	$i_b =$
5 000	$i_b =$	22 500	$i_b =$
7 500	$i_b =$	25 000	$i_b =$
10 000	$i_b =$	27 500	$i_b =$
12 500	$i_b =$	30 000	$i_b =$
15 000	$i_b =$	35 000	$i_b =$

c. En el plano de la siguiente página, grafiquen los datos de la tabla; coloquen título a la gráfica, al eje de las abscisas y al de las ordenadas. Después respondan.

© SANTILLANA



- ¿En qué puntos la curva interseca al eje de las abscisas? ______
- ¿Qué significan los valores anteriores? ______
- ¿Para qué cantidad de pares de zapatos vendidos se tiene el mayor ingreso bruto? Argumenten. ______
- ¿Cuál es el ingreso bruto por la venta de 10 000 pares de zapatos? ¿Hay alguna otra cantidad de pares vendidos por lo que se obtenga el mismo ingreso? ______
- ¿Cuántos pares de zapatos se deben vender para lograr un ingreso bruto de $6 000 000? ______
- Dada la gráfica, ¿qué sucedería si se vendieron 40 000 pares de zapatos? ______

d. La tercera expresión indica el costo de producción de cada par de zapatos: salario de los trabajadores, pago de servicios e impuestos, además de la inversión inicial para el diseño de modelos y adecuaciones de maquinaria. Respondan en su cuaderno.

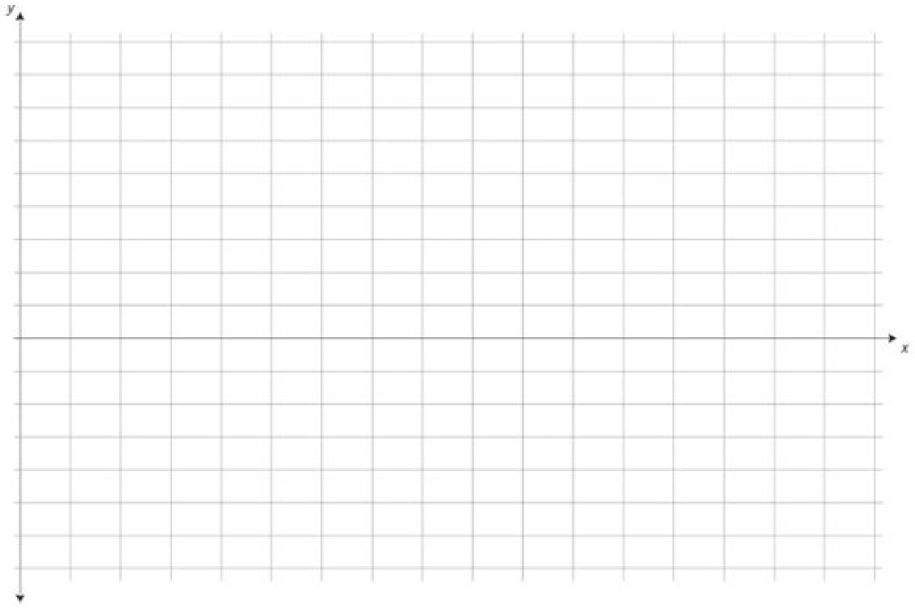
- De la expresión $c_p = 100x + 1000000$, ¿qué término representa la inversión inicial? ¿Qué término significa el costo de producción por cada par de zapatos?
- Si la expresión $c_p = 100x + 1000000$, la escriben en función de x y realizan la gráfica, ¿esta es una función cuadrática? Justifiquen.
- Elaboren en su cuaderno una gráfica de la función anterior, utilicen valores para x de 0, 2 500, 5 000, ..., 35 000. ¿Qué tipo de función representa?

e. La cuarta expresión modela la ganancia en pesos que podría tener la fabricación del nuevo calzado, para ello se ha previsto una ganancia de, al menos $3 000 000, siempre y cuando se garantice cierta cantidad de pares de zapatos vendidos. Para eso es necesario determinar un precio mínimo y uno máximo de zapatos.

- La expresión para la última información es: $g = x(700 - 0.02x) - (100x + 1000000)$, y queda como $3000000 = x(700 - 0.02x) - (100x + 1000000)$. Completen la tabla de la siguiente página para los diferentes valores de x, después tracen la gráfica.

© SANTILLANA

x	$3000000 = (700x - 0.02x^2) - (100x + 1000000)$	x	$3000000 = (700x - 0.02x^2) - (100x + 1000000)$
0		17 500	
2 500		20 000	
5 000		22 500	
7 500		25 000	
10 000		27 500	
12 500		30 000	
15 000		32 500	



- ¿Qué variable se representa en el eje de las abscisas? ¿Y en el eje de las ordenadas? ____________
- ¿La función que modela la ganancia es una función cuadrática? ____________
- ¿En qué puntos la curva interseca al eje de las abscisas? ____________
- ¿Qué significan los valores anteriores? ____________
- Sustituyan los valores de x donde la curva interseca al eje de las abscisas. En la expresión $p_d = 700 - 0.02x$. ¿Qué resultados se obtienen? ____________
- ¿Para qué cantidad de pares de zapatos vendidos se tiene la mayor ganancia? ¿Cuál sería el precio de venta? ¿Cómo se aprecia esto en la gráfica? ____________
- ¿Se podría decir que si se venden 5 000 pares de zapatos hay ganancia? Justifiquen. ____________

› Socialicen y comparen sus respuestas y argumentos con el grupo. Con ayuda del profesor validen su veracidad. Registren sus conclusiones en su cuaderno.

© SANTILLANA

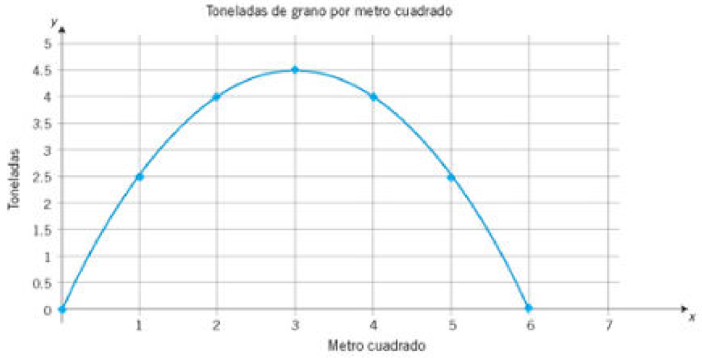
© SANTILLANA

Funciones cuadráticas en otras situaciones

4. Reunidos en pareja analicen la información y realicen lo que se indica.

Gustavo heredó algunas hectáreas de tierra e investigó qué le conviene sembrar y la cantidad de semillas por metro cuadrado que se requieren para obtener la mayor cantidad de toneladas de siembra por hectárea. Concluyó que el sorgo es lo más adecuado porque sus tierras son de temporal y porque la cantidad de grano por metro cuadrado es variable. Para ello realizó la siguiente gráfica.

a. Analicen la gráfica y respondan.



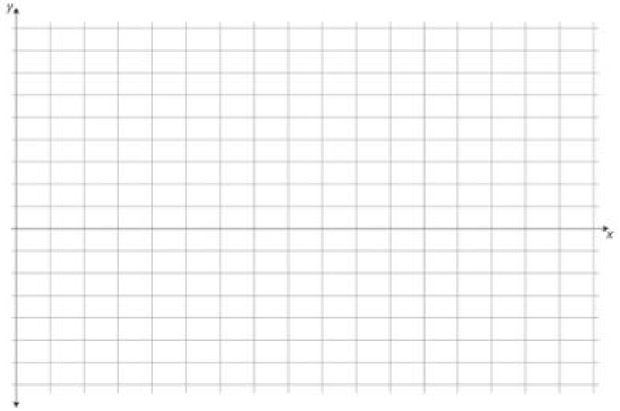
- Según los datos de la gráfica, ¿en cuántos metros de terreno se da la mayor cantidad de toneladas de granos de sorgo? ____________
- ¿En qué pares de metros cuadrados se obtiene la misma cantidad de granos? ____________
- ¿El modelo que muestra la gráfica es una función cuadrática? ____________
- ¿Cuál de las siguientes funciones modela la gráfica? Argumenten su elección. ____________

- $f(x) = -4x(3 - \frac{1}{2}x)$
- $f(x) = x(3 - \frac{1}{2}x)$
- $f(x) = 4x(-3 - \frac{1}{2}x)$
- $f(x) = 4x(3 - x)$

b. Con base en la función que determinaron, elaboren en su cuaderno una tabla y corroboren que esta corresponde con la gráfica. Si no es así, replanteen su análisis y vuelvan a elegir la función correcta.

- De las funciones dadas, ¿cuál es la diferencia entre $f(x) = -4x(3 - \frac{1}{2}x)$ y $f(x) = 4x(-3 - \frac{1}{2}x)$? ____________
- Escriban las dos expresiones anteriores de manera que tengan estructura de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. ____________
- En las funciones $-4x(3 - \frac{1}{2}x)$ y $4x(-3 - \frac{1}{2}x)$, ¿cuál es el valor del coeficiente a? ____________
- ¿Cómo influye el signo del coeficiente a en el comportamiento o forma de la gráfica? ____________

c. En el siguiente plano cartesiano, tracen la gráfica de las dos funciones anteriores y validen el razonamiento de la última pregunta.



❯ Socialicen sus respuestas y argumentos y con ayuda del profesor corroboren su veracidad. Lean la siguiente información teórica para hacer sus conclusiones.

Cuando se tiene una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, el signo del coeficiente del término cuadrático determina hacia dónde se abre la curva, es decir, si el coeficiente a tiene signo negativo, la curva se abre hacia abajo, y si es positivo, abre hacia arriba.
Cabe mencionar que el término independiente c indica la ordenada del punto $(0, c)$ por el que interseca la curva al eje de las ordenadas.
Si el término lineal bx es cero, la curva siempre estará sobre el eje de la ordenadas, pero si el término lineal es mayor o menor que cero la curva estará en algún cuadrante del plano cartesiano.

5. Realiza lo que se indica en cada problema planteado.

a. Ramón es estudiante de Física e hizo el exprimento de lanzar un objeto hacia arriba, desde la azotea de un edifico, para determinar la altura máxima que alcanza y el tiempo que tarda en llegar al suelo. La altura de la que lo lanzó fue de 60 metros. La expresión que modela el experimento es: $h(t) = -\frac{1}{10}t^2 + t + 60$.

- Si dicha función se grafica, ¿hacia dónde se abre la curva? ____________
- ¿Por cuál punto interseca al eje de las ordenadas? ____________
- Grafica la función propuesta por Ramón, y responde:
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto lanzado? ____________
- ¿Cuánto tiempo tarda desde que es lanzado hasta llegar al piso? ____________

❯ Socializa tus argumentos y con ayuda del profesor valida la veracidad de tus respuestas en cada inciso.

© SANTILLANA

6. Realicen en equipo lo que se solicita y respondan en su cuaderno.

a. Grafiquen en el cuaderno o en una hoja de papel milimétrico las siguientes funciones. Utilicen el color correspondiente de cada una. Consideren el rango de valores entre −2.5 y 2.5 para la variable independiente.

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = 2x^2$
- $h(x) = 4x^2$
- $p(x) = 8x^2$
- $q(x) = -x^2$
- $r(x) = -2x^2$
- $s(x) = -4x^2$
- $t(x) = -8x^2$

  - ¿Cuál es la diferencia que hay entre las funciones $f(x) = x^2$ y $q(x) = -x^2$?
  - ¿Qué sucede con las primeras cuatro funciones a medida que aumenta el coeficiente a?
  - Si los coeficientes de las funciones fueran $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, ¿cómo serían las gráficas? ¿En qué se diferencian con respecto de las funciones originales?

b. Grafiquen las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 3$. Consideren el rango de valores de −2.5 a 2.5 para la variable independiente.

  - ¿Qué significa que a las funciones se les haya agregado el término independiente?

c. Grafiquen las siguientes funciones. Consideren el rango de valores de −2.5 a 2.5 para la variable independiente.

- $f(x) = -x^2 + 2$
- $f(x) = -x^2 - 2$

  - ¿Cómo afecta el signo del término independiente a las funciones?
  - ¿Cuántas soluciones tienen las ecuaciones anteriores? ¿Cómo lo determinaron?

d. Grafiquen las siguientes funciones. Consideren el rango de valores de −2.5 a 2.5 para la variable independiente.

- $f(x) = x^2 + x + 2$
- $f(x) = -x^2 - x - 2$
- $f(x) = x^2 - x + 2$
- $f(x) = x^2 - x - 2$

  - Según sea el caso, ¿en qué cuadrante se ubica el punto mínimo o máximo de las gráficas?
  - Para todos los casos en los que han graficado, el rango de valores para la variable independiente se ha restringido. ¿Es posible ampliarlo? ¿En qué rango?

❯ Socialicen sus argumentos y, con ayuda del profesor, registren en su cuaderno las conclusiones del grupo sobre la forma de las gráficas de funciones cuadráticas.

Reto — Función cuadrática

1. Reunidos en pareja, realicen en su cuaderno lo que se pide.

Analicen la función $g(x) = 100 - 4x^2$ y respondan las siguientes preguntas:

- ¿La función es cuadrática?
- Si esta se grafica, ¿la curva se abre hacia arriba o hacia abajo?
- Si consideran el uso de números negativos, ¿cuál puede ser el rango de valores que puede tomar la variable independiente?
- Con base en lo anterior, realicen la gráfica correspondiente. Consideren el rango de valores de −6 a 6.

2. Seleccionen una función del punto 6 y planteen un problema que se resuelva con ella.

❯ Discutan en grupo sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

Ingresa a cualquiera de los siguientes sitios web, practica con el interactivo y después realiza lo que se te solicita

nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_109_g_4_t_2.html?open=activities&from=topic_t_2.html

recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/experiencias/mvi/representacion_fun_cuadratica.htm

- Retoma la función resuelta en el "Reto" y varía el término independiente. Analiza qué sucede con el gráfico al variar este dato y escribe tus conclusiones.
- Considerando el valor original del término independiente, ahora varía el valor del coeficiente del término cuadrático por −6, −8, −10. Observa qué sucede con el gráfico y escribe tus conclusiones.
- Retoma algunas funciones del inciso c de esta página y grafícalas. Analiza si estas coinciden con las que hiciste.

Comparte tus experiencias y discute con tus compañeros tus conclusiones. Si hay dudas, pide apoyo al profesor. (27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

19

Curvas que modelan situaciones en movimiento

Eje: Manejo de la información
Tema: Proporcionalidad y funciones

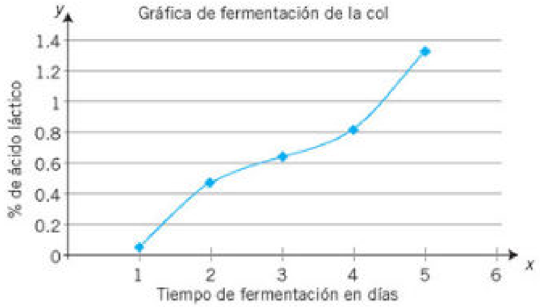
Contenido: Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Fermentación ácido láctico

1. En pareja realicen lo que se plantea.

Muchos de los alimentos y bebidas que consumes a diario pasaron por un proceso de **fermentación**. En la actualidad, en la industria alimentaria, se usa con mucho éxito el proceso de fermentación ácido láctico, donde los azúcares presentes en vegetales se transforman en ácido láctico, etanol y dióxido de carbono. Después el vegetal puede ser envasado para comercializarse.

En la siguiente gráfica se muestra el tiempo de fermentación de una col regular (450 g) y el porcentaje de producción de ácido láctico.



a. Con base en los datos de la gráfica, completen los datos de la tabla.

Días	1	2	3	4	5
Producción de ácido láctico (%)					

b. Describan en el cuaderno el crecimiento que muestran los datos de la gráfica.

- Con estos datos, ¿se puede predecir qué porcentaje de acido láctico se producirá en el día 6? Sustenten.
- ¿Cuál fue el incremento del porcentaje de ácido láctico del día 1 al 2?
- ¿Entre qué días el incremento fue mayor? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica?
- En promedio, ¿cuál es el incremento porcentual de ácido láctico?
- ¿En qué día se tuvo la mitad de la producción final de ácido láctico? Explica.
- ¿Con qué argumentos pueden sustentar el tipo de crecimiento de producción de ácido láctico al fermentar la col?

› Comenten en clase sus respuestas y explicaciones y registren sus acuerdos.

Glosario

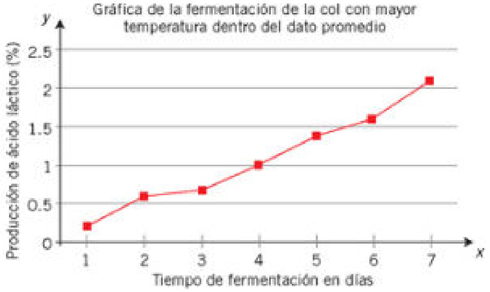
fermentación. es un proceso natural que ocurre en determinados compuestos o elementos a partir de la acción de diferentes actores y que se podría simplificar como un proceso de oxidación incompleta.

© SANTILLANA

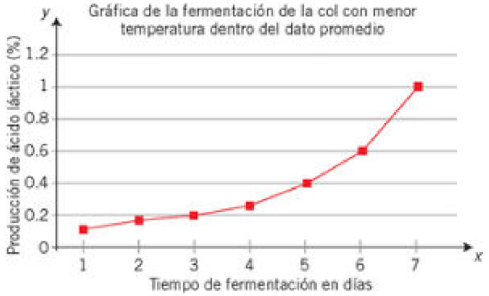
Pruebas de fermentación

2. Trabajen en equipo las siguientes actividades. Respondan en su cuaderno.

a. En una empresa se hacen pruebas de fermentación, considerando que las modificaciones en la temperatura del laboratorio influyen en la producción del ácido láctico. Las siguientes gráficas muestran la producción de ácido láctico en dos distintas temperaturas. Analícenlas y respondan en el cuaderno.



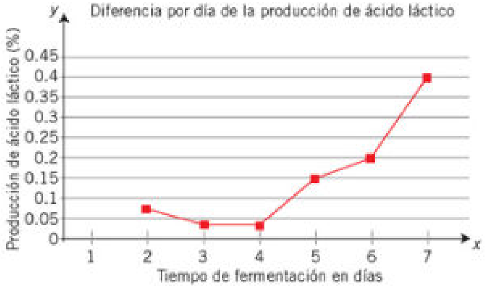
Gráfica A



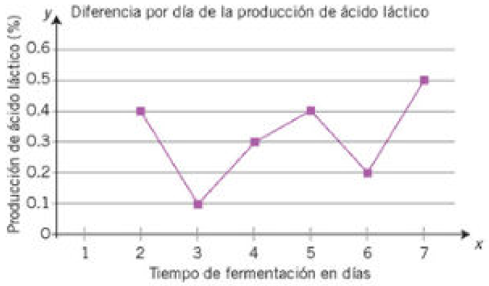
Gráfica B

- ¿Qué gráfica representa mayor producción de ácido láctico? Argumenten.
- Describan las características de las gráficas A y B. ¿Cómo es el crecimiento de los datos que se muestran?
- ¿Cómo es la producción de ácido láctico de la gráfica A en comparación con la B?
- ¿Identifican algún patrón en el crecimiento de los datos? Expliquen.
- ¿En cuántos días la mayor producción de la gráfica B se logra en la gráfica A?
- ¿Qué significado le pueden asociar a la respuesta anterior?

b. Analicen las gráficas C y D, donde se muestra la diferencia de producción de ácido láctico, por día, según los datos de las gráficas A y B. Las gráficas indican la diferencia del día correspondiente menos el día anterior.



Gráfica C



Gráfica D

- ¿Cuál de las gráficas corresponde a los datos de la gráfica A?
- ¿Cuál corresponde a los datos de la gráfica B?
- Describan el comportamiento de las diferencias en ambas gráficas y su significado.
- De acuerdo con la información de la gráfica C, ¿en qué día la diferencia de producción de ácido láctico fue menor? ¿Y en la gráfica D?
- ¿En qué día se produjo la mayor diferencia de ácido láctico?

© SANTILLANA

c. Se tiene la hipótesis de que cuando hay mayor número de bacterias se acelera el proceso de producción de ácido láctico.

- Si esto es cierto, ¿en qué datos de las gráficas anteriores se corrobora la idea? Expliquen para cada caso.
- Expliquen las razones por las que en un proceso se obtiene mayor o menor producción de ácido láctico.

d. Plantea al menos 5 preguntas o problemas que se puedan contestar con la información de las gráficas A, B, C y D.

- Intercambia tus preguntas con otro compañero y respóndelas.

› Socialicen sus respuestas y argumentos al grupo, después establezcan sus acuerdos con respecto a lo realizado.

La producción de salmuera


Añadir sal al agua produce salmuera.


Encurtidos preparados.

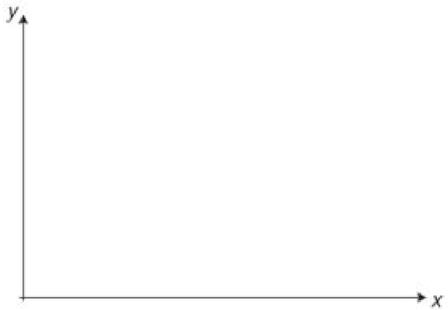
3. Lean en pareja la información y realicen lo que se indica.

La salmuera es agua con una alta concentración de sal disuelta. Este producto se usa para conservar alimentos, como la carne o para preparar encurtidos fermentados, como verduras, entre otros usos.

a. En la siguiente tabla se muestran los datos requeridos para la elaboración de salmuera, usada en encurtidos fermentados, con base en un tubo de agua.

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de sal (g)	80	60	20	10	10	10	10	10

- ¿Identifican algún patrón en los datos? Expliquen. ______
- ¿Cuál es el incremento de sal de la semana 1 a la semana 2? ______
- ¿En qué semana se requirió mayor cantidad de sal? ______
- Expliquen las características de la gráfica que represente los datos de la tabla. ______



b. Con los datos anteriores, elaboren la gráfica que represente el proceso de elaboración de la salmuera. Después respondan.

- ¿Se parece la gráfica a la anticipación que hicieron de la misma?

› Socialicen con el grupo sus experiencias y registren sus conclusiones acerca de representación de gráficas con secciones rectas que modelan situaciones como las estudiadas.

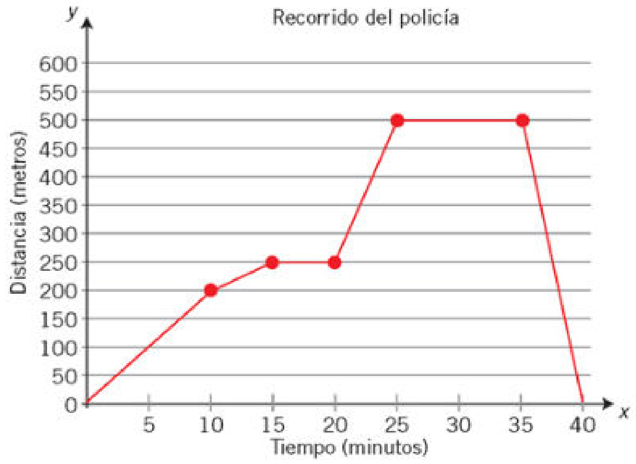
© SANTILLANA

© SANTILLANA

Recorridos y trayectos

4. De manera individual realiza lo que se pide.

a. Un policía realiza diariamente su rondín, de su base al parque de la colonia que tiene asignada y de regreso. El trayecto se muestra en la siguiente gráfica.

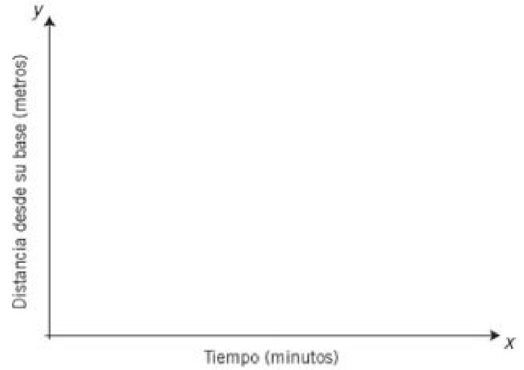


- ¿Cuál es la distancia recorrida por el policía en su rondín? Describe lo que hiciste para determinarlo. ______
- ¿Cuánto tiempo tardó en hacer su rondín el policía? ______ ¿Cómo lo determinaste? ______
- ¿En cuánto tiempo llegó al punto más lejano de su base? ______ ¿Cómo se representa en la gráfica? ______
- Si llegó a las 9 horas al parque, ¿a qué hora salió de su base? ______
- ¿A qué distancia de la base se detuvo? ¿Después de caminar cuánto tiempo? ______
- ¿Cuánto tiempo estuvo sin moverse el policía? Argumenta tu respuesta. ______
- ¿En qué momento del recorrido, avanzó más rápido? ¿Cómo lo sabes? ______
- ¿Qué tiempo estuvo en el parque el policía antes de regresarse? ______
- En la situación de la gráfica, ¿qué representa la coordenada (40, 0)? ______

› Socialicen sus respuestas y valídenlas con la guía de su maestro.

b. Otro policía sale de su base para hacer su recorrido habitual. Camina 1 120 metros en 32 minutos. Después, se detiene 25 minutos para vigilar un punto de su sector. Retoma su recorrido y avanza 420 m durante 15 minutos. Recibe una alerta a su radio para atender una emergencia y corre durante 5 minutos, 675 m; pide ayuda a una patrulla, se sube a ella y recorre, en 5 minutos 5 km, para llegar al lugar de la urgencia. Permanece ahí durante 35 minutos, después regresa a su base, para lo cual tarda 50 minutos.

- ¿Cuánto tiempo hizo en su recorrido hasta regresar a su base? ______________
- Supón que el policía recorre cada tramo a una velocidad constante, que lo hace en línea recta y traza la gráfica del recorrido del policía.



› Socializa tu gráfica y en grupo valídenla. Si hay diferencias entre las gráficas o dudas, coméntenlas con la finalidad de solucionarlas.

La camioneta de Demetrio

5. Reunidos en pareja, lean la información, analicen las gráficas y respondan.

a. Demetrio tiene una camioneta de reparto y todas las tardes llena su tanque de gasolina, sin importar la gasolina que contenga. Las gráficas representan el tiempo de llenado del tanque en dos días distintos.

Día 1

Día 2

- ¿Qué día compró más litros de gasolina? ______________
- ¿Qué día tardó más tiempo en llenarse el tanque de gasolina? Expliquen su respuesta. ______________

© SANTILLANA

© SANTILLANA

b. Analicen la gráfica del primer día.

- ¿Cuántos litros entraron al tanque en los primeros dos minutos? ______________
- ¿Cuántos litros entraron al tanque en los últimos dos minutos? ______________
- ¿El llenado del tanque de gasolina fue constante? Expliquen su respuesta. ______________

c. Ahora, analicen la gráfica del segundo día.

- ¿De qué minuto a qué minuto entró la mayor cantidad de gasolina al tanque? ¿Cómo se muestra esto en la gráfica? ______________
- Compara el ingreso de gasolina en el minuto 1, con lo que ingresó en el minuto 2 a 3. ¿Cómo fueron los ingresos de gasolina? Expliquen. ______________
- Expliquen cuáles son las diferencias entre las dos gráficas. ______________

d. Como pueden notar, cada segmento de recta en cada gráfica representa una función lineal de la forma $y = kx + b$. Escriban la función que representa cada segmento en ambas gráficas.

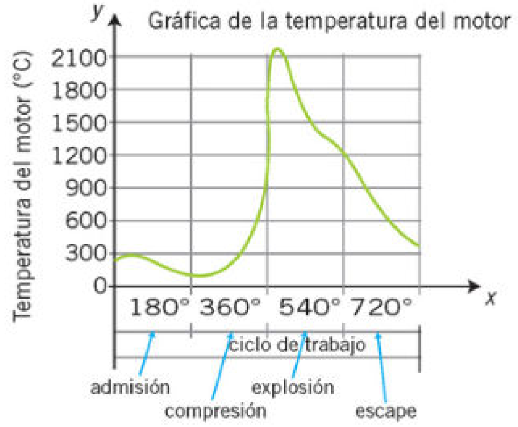
› Socialicen sus respuestas y valídenlas con la guía de su maestro.

6. Reúnanse en equipo, lean la información y respondan en su cuaderno.

Demetrio leyó, en el manual de la camioneta, que durante el funcionamiento del motor la temperatura alcanzada en el interior de los cilindros supera los 2 000 °C, por lo que es necesario un buen sistema de refrigeración que ayude a evacuar el calor producido durante la combustión hasta obtener su máximo rendimiento. Lo anterior se muestra en la siguiente gráfica.

a. Describan las características de la gráfica.

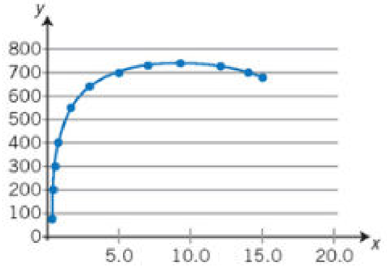
- ¿Cuál es el comportamiento de la temperatura en la etapa de la "admisión" del ciclo de trabajo? Expliquen.
- Describan el comportamiento de la temperatura del motor en la etapa "compresión" del ciclo de trabajo.
- ¿Qué sucede en la etapa de "explosión" del ciclo de trabajo? Argumenten.
- ¿Qué pasa con la temperatura en la etapa del "escape" del ciclo de trabajo?
- ¿Cuál es la temperatura máxima que alcanza el motor durante todo el ciclo?
- ¿En qué ciclo de trabajo el motor tiene la mitad de la temperatura máxima?
- ¿Cuál es la temperatura mínima registrada en el ciclo de trabajo?
- ¿En algún momento la variación de temperatura es constante?

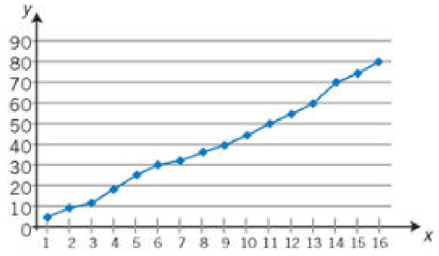


› Expongan sus respuestas a la clase y registren sus acuerdos.

7. **De manera individual realiza lo que se pide.**

a. Describe en tu cuaderno una situación que pueda modelarse con cada una de las gráficas que se muestran.



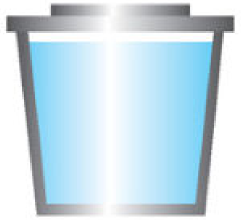


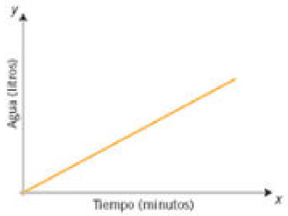
› Socializa tus planteamientos y valídalos con tus compañeros, y con tu profesor.

Gráficas de llenado

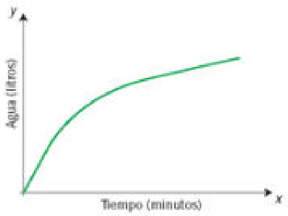
8. **Reunidos en pareja realicen lo que se plantea.**

a. Se dio a conocer el tiempo en que una pipa, con una caída de agua constante, llena distintas cisternas con capacidad de 1 750 litros. Selecciona la gráfica que representa el llenado de la cisterna que se muestra a la izquierda.





Gráfica 1



Gráfica 2

Gráfica 3

Gráfica 4

b. Describan o tracen en su cuaderno las características de la forma de las cisternas que representan las gráficas restantes.

- Reflexionen. ¿Qué sucede en la cisterna representada en la gráfica 3 cuando la recta es horizontal?

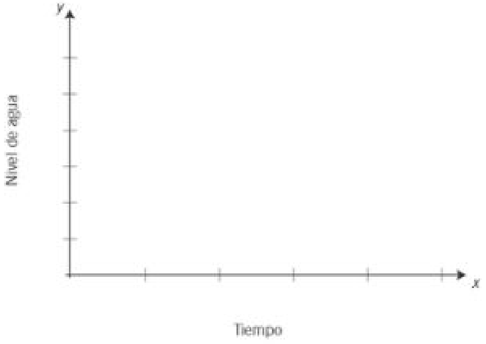
› Socialicen con el grupo sus argumentos y describan en qué coincidieron o cuáles fueron sus diferencias.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

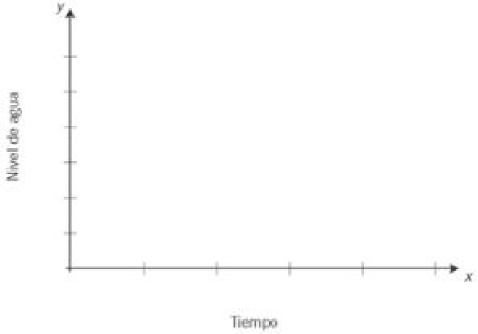
9. **Realiza lo que se solicita.**

a. Carlos tiene una pecera como la que se muestra. Cada semana se encarga de lavarla. Elabora la gráfica que represente el llenado de la pecera, si la llena bajo una llave con una caída de agua constante.



b. Analiza las características de cada recipiente y determina la gráfica que representa su llenado. Considera que la caída de agua es constante.

1 2 3



› Socialicen sus experiencias con respecto a la lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones estudiadas.

Reto Velocidad y tiempo

1. **Elabora en tu cuaderno una gráfica de la siguiente situación.**

Un mecánico está probando los frenos de un auto y para ello inicia su recorrido, al cabo de 10 segundos adquiere una velocidad de 60 m/s y permanece a esa velocidad durante 20 segundos, disminuye por 4 segundos su velocidad hasta llegar a una velocidad de 30 m/s. Luego de esto frena durante 20 segundos hasta obtener un alto total.

2. **Plantea un problema que se modele con una gráfica. Intercámbialo con un compañero y pídele que lo resuelva. Revisa la gráfica y valida la respuesta.**

› Discutan en grupo sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para que en grupo sean aclaradas.

Apoyo tecnológico

Ingresa al siguiente sitio web donde se da información acerca de "Procesamiento de la información: tablas y gráficos", revisen la sección titulada "Construcción de gráficas cartesianas a partir de tablas".

www.profesorenlinea.com.mx/matematica/Graficos.html

Comparte tus experiencias y discute con tus compañeros tus conclusiones .Si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 23 de enero de 2017)

20

Probabilidad de eventos independientes

Eje: Manejo de la información
Tema: Nociones de probabilidad

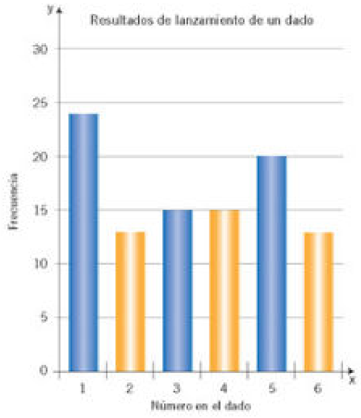
Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Lanzamiento de un dado

1. Reunidos en pareja realicen lo que se solicita.

a. Virginia y Cecilia juegan a tirar un dado; gana quien obtenga más veces el número que escogió.

- ¿Al lanzar el dado, algún número tiene mayor probabilidad de salir más veces? ______
  Argumenten su respuesta. ______



b. Antes de escoger un número, Virginia y Cecilia analizan la gráfica en la que se muestran los resultados de simular 100 veces el lanzamiento de un dado.

- Según los resultados de la gráfica, si en la siguiente tirada Virginia escoge el número 1, ¿ganará el juego? ¿Por qué? ______
- Si Cecilia elige 5, ¿perderá la partida? Expliquen. ______
- Si Virginia selecciona el número 2 o el 4, ¿puede ganar en el lanzamiento 101? Argumenten. ______
- Si se lanzan 100 veces más los dados, ¿pueden saber qué número saldrá en más ocasiones? Justifiquen. ______

c. Escriban la **probabilidad teórica (P)** de cada resultado.

Número en el dado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad (P)						

- ¿Cómo son las probabilidades obtenidas? ______
- ¿El resultado de un lanzamiento influye en el resultado del siguiente? ______
  Expliquen su respuesta. ______
- ¿Cómo son estos eventos? Justifiquen. ______

d. Argumenten la veracidad de la siguiente afirmación:

El resultado de dos lanzamientos son **eventos independientes**, es decir, la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

› Comparen sus argumentos con otros compañeros y registren sus conclusiones.

Glosario

probabilidad teórica (P). En un experimento aleatorio, es el cociente de resultados favorables de un evento entre todos los resultados o eventos posibles.

© SANTILLANA

Eventos independientes y compuestos

2. Resuelvan en pareja.

Virginia y Cecilia decidieron lanzar dos dados (uno azul y uno rojo) y predecir el resultado de la suma de ambos.

a. Determinen el espacio muestral del experimento descrito.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)					
2					(2, 5)	
3				(3, 4)		
4			(4, 3)			
5		(5, 2)				
6						(6, 6)

- ¿Cuántos son los posibles resultados? ______
  ¿Se puede saber con anticipación el resultado de un lanzamiento? ¿Por qué? ______

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar únicamente el dado azul salga 4? ______

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado rojo también salga 4? ______
- En los dos casos anteriores, ¿afecta o influye en la probabilidad de un resultado el otro? Expliquen por qué. ______
- Al lanzar ambos dados, ¿cuál es la probabilidad de que caiga el número 4 en los dos? ¿Cómo lo determinaron? ______
- ¿Qué relación hay entre la probabilidad de obtener 4 en cada dado, al lanzarlos individualmente, y de que caiga 4 en ambos dados, al lanzarlos juntos? Expliquen. ______
- ¿Qué representa la operación $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, en el contexto de las situaciones planteadas? Expliquen. ______
- Al lanzar el dado azul, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número non? ______
- ¿Y de que en el dado rojo salga 5? ______
- Escriban la probabilidad de que, al lanzar los dos dados, el azul caiga en número non y el rojo en 5. ¿Cómo lo determinaron? ______

© SANTILLANA

- Escriban la probabilidad de que salga 2 al lanzar el dado rojo. ______
- Determinen la probabilidad de que salga un número par en el dado azul. ______
- Anoten la probabilidad de que, al lanzar los dos dados, uno caiga en número par y otro caiga en 2. ______ ¿Cómo lo determinaron? ______

c. Utilicen el modelo del lanzamiento de los dos dados para escribir dos eventos que sean independientes y determinen la probabilidad de cada uno.

- Evento 1: ______
- Evento 2: ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambos eventos ocurran al mismo tiempo? ¿Cómo lo determinaron? ______

› Socialicen sus respuestas y registren en grupo sus acuerdos.

Las urnas y la moneda

3. De manera individual realiza lo que se indica.

Se tiene una moneda y dos urnas, como las que se muestran. Se lanza una moneda: si cae águila, se saca una bola de la urna 1; si cae sol, se saca una bola de la urna 2.

Urna 1 Urna 2

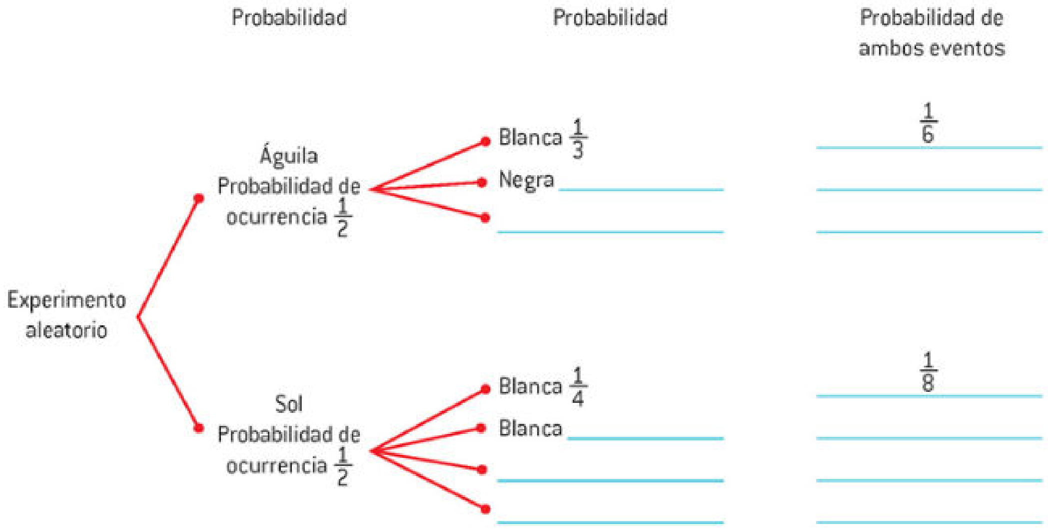
a. Responde.

- Si la probabilidad de que caiga sol es de $\frac{1}{2}$, y de extraer una bola negra de la urna 2 es de $\frac{1}{4}$, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran ambos eventos? Argumenta. ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y de extraer una bola blanca? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga águila y sacar una bola blanca? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar águila y bola negra? ______
- ¿Qué evento tiene mayor probabilidad de ocurrir? Explica tu respuesta. ______
- Sustenta por qué, el que salga sol y bola negra, es un evento compuesto. ______

© SANTILLANA

© SANTILLANA

b. Para comprobar las respuestas de la actividad anterior, completa el diagrama de árbol, en el que se representa el espacio muestral de la experiencia aleatoria. Después contesta.



- ¿Coinciden tus resultados anteriores con los que muestra el diagrama de árbol?
- ¿Dos eventos son independientes cuando la probabilidad de que ocurran ambos puede calcularse mediante el producto de la probalidad de uno por la probabilidad del otro? Explica. ______

› Socializa tus respuestas con el grupo. Después, bajo la guía del maestro discutan la siguiente información teórica:

Como viste antes, dos eventos son **independientes** si el resultado del segundo no es afectado por el resultado del primero. Si **A** y **B** son eventos independientes, la probabilidad de que ambos ocurran es igual al producto de las probabilidades de los eventos individuales: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.

Lo anterior se conoce como regla del producto, en el que la probabilidad obtenida siempre es menor que la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos eventos considerados.

- Expliquen por qué en el problema de las urnas y la moneda, aplica la regla del producto: ______
- Escriban un ejemplo de experiencia aleatoria que cumpla con la regla del producto: ______

› Socialicen sus ejemplos y verifiquen que sean correctos.

Aplicación de la regla del producto

4. Resuelvan en equipo los siguientes problemas.

a. En una fábrica de tornillos hay tres máquinas, con estas características:

Existe una gran variedad de tornillos. Su forma, tamaño y material, depende de su uso.

- la máquina A produce 30% de los tornillos, de los cuales 2% salen defectuosos.
- la máquina B fabrica 50% de los tornillos, de los cuales 1% es defectuoso.
- la máquina C hace el otro 20% y 3% de estos resultan defectuosos.
  - Determinen la probabilidad de elegir al azar un tornillo de cada máquina:

    Máquina A: ________ Máquina B: ________ Máquina C: ________
  - ¿Cuál es la probabilidad de tomar un tornillo fabricado por la máquina A y que no esté defectuoso? ____________ ¿Cómo lo determinaron? ____________
  - ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la máquina B y que esté defectuoso. ________
  - ¿Y producido por la máquina C y que no esté defectuoso? ____________
  - ¿Cuál es la probabilidad de tomar un tornillo defectuoso? ____________

    ¿Y de elegir uno sin defectos? ____________
  - Determinen la probabilidad de escoger un tornillo fabricado por la máquina A o B que no sea defectuoso. Argumenten su respuesta. ____________

b. En un aula escolar hay 50 sillas, 30 con respaldo y 20 sin él. De las sillas sin respaldo, tres son nuevas y entre las sillas con respaldo hay siete nuevas.

- Si se toma una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de escoger una con respaldo? ____
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir una silla nueva? Justifiquen. ____________
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea nueva y con respaldo? Expliquen su respuesta. ____
- Si se selecciona una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que sea sin respaldo? Argumenten. ____________

c. En un grupo de matemáticas, 65% son hombres y 35% son mujeres. La tercera parte de los hombres juega futbol y el resto basquetbol. De las mujeres, la mitad practica danza y el resto equitación. Se quiere elegir un alumno al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y juegue futbol? ____________
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y practique danza? ____________
- Expliquen cómo obtuvieron las respuestas. ____________

© SANTILLANA

© SANTILLANA

d. Según el registro de una terminal aérea, una de cada 200 personas pierde un vuelo, es decir, $\frac{1}{200}$. Las autoridades saben que 70% de los pasajeros son hombres, que 30% son mujeres, y que de los hombres 80% viaja por negocios y 20% por placer; mientras que de las mujeres, 48% viaja por negocios y 52% por placer. La terminal decidió llamar a los pasajeros para encuestarlos acerca del servicio que ofrece.

- Al hacer una llamada, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya perdido un vuelo? ____________ ¿Qué operación permite obtenerla? ____________
- Determinen la probabilidad de que la persona que recibe la llamada haya perdido un vuelo, según el caso.

	Mujer	Hombre
Viaja por negocios		
Viaja por placer		

- La suma de las probabilidades de la tabla debe ser igual a $\frac{1}{200}$. Justifiquen lo anterior. Si sus resultados no coinciden, corrijan sus respuestas.

› Socialicen sus resultados; si tuvieron dificultades, extérnenlas con la finalidad de solucionarlas. Registren sus acuerdos con la validación del maestro.

Reto Regla del producto

1. Resuelvan en pareja las siguientes actividades.

En un experimento aleatorio se tienen dos monedas y un dado. Se lanzan primero las dos monedas y al final el dado.

- ¿Cuál es la probabilidad del evento {águila, águila, 5}?

a. Representen en su cuaderno el experimento aleatorio en un diagrama de árbol.

b. Determinen la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos:

- Cae sol, sol y número par: ____________
- Cae águila, sol y múltiplo de 3: ____________
- Cae águila, águila y número primo: ____________

2. Planteen tres eventos independientes en los que sea necesario aplicar la regla del producto para calcular su probabilidad.

a. Evento: ____________

b. Evento: ____________

c. Evento: ____________

› Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

En: eduteka.icesi.edu.co/MI/master/interactivate/discussions/pd9.html analiza la "Discusión sobre probabilidad de eventos simultáneos". Resalta las ventajas del uso de la regla del producto en la resolución de los problemas implicados. Comparte tus experiencias en clase; si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 23 de enero de 2017)

Para saber más

Eficiencia en el consumo de energía eléctrica

En esta sección tendrás la oportunidad de favorecer tus habilidades para investigar y organizar información relevante acerca de un problema vinculado con experiencias de la vida cotidiana en los ámbitos familiar, social y económico.

1. En pareja, realicen lo que se pide y contesten.

En una delegación de la Ciudad de México se ha iniciado un proyecto de ahorro de electricidad, llamado "Eficiencia energética". La fábrica A estudia la posibilidad de unirse al proyecto; el ingeniero Rodríguez se basó en el consumo energético de los últimos bimestres para obtener la expresión algebraica: $-x^2 + 155x + 145$, que le permite modelar cómo será el consumo de los siguientes seis bimestres.

- Con base en la información, ¿qué representa la literal x? ______________________

____

a. Apliquen la expresión algebraica para determinar los valores de la tabla.

Bimestre	Consumo energético (Kw/H)
1	301
2	
3	
4	
5	
6	

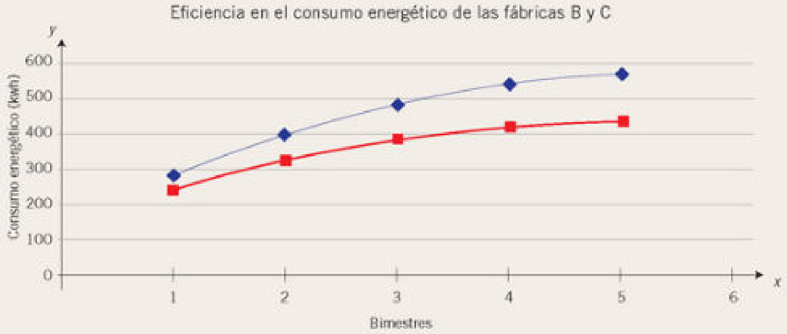
- Con los datos de la tabla, describan cómo será el consumo eléctrico de la fábrica A.
- ¿Cuál es el bimestre en el que la fábrica A registró mayor consumo de electricidad?
- Expliquen por qué la situación anterior se puede modelar como una función de segundo grado o cuadrática.

b. En el plano que se muestra, construyan la gráfica que modele la situación anterior.

- Expliquen las características de la gráfica.

© SANTILLANA

c. En las siguientes gráficas se representa el consumo de enegía de la fábrica B que ingresó al proyecto y otra que no, la fábrica C. Ambas tienen el mismo número de empleados y comparten rutinas similares. Respondan en su cuaderno.



- Con los datos de la gráfica, ¿se puede saber qué fábrica se incorporó al programa y cuál no? ¿Por qué?
- En la gráfica, ¿qué color modela el consumo energético de la fábrica B?
- ¿Esta representación gráfica permite que los usuarios tengan clara la información que se representa? Expliquen su respuesta.

d. Las siguientes expresiones algebraicas muestran el consumo energético de las empresas B y C. Determinen cuál corresponde a cada una; argumenten su selección.

- $-14x^2 + 155x + 145$: modela los datos asociados a la fábrica __________ debido a: ______________________
- $-12x^2 + 120x + 135$: modela los datos asociados a la fábrica __________ debido a: ______________________

e. Aplicando la ecuación algebraica, completen los datos de la tabla.

Fábrica B		Fábrica C	
Bimestre	Consumo energético (Kw/H)	Bimestre	Consumo energético (Kw/H)
1	286	1	243
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	

- ¿Qué fábrica tiene menor consumo de energía? Expliquen.
- Para cada fábrica, ¿en qué mes, el consumo fue mayor?
- Para cada fábrica, ¿en qué mes el consumo fue disminuyendo?

› Socialicen en grupo sus inquietudes y comenten cómo las matemáticas ayudan en la economía del hogar.

© SANTILLANA

Evaluación tipo PISA

› Elige la opción con la respuesta correcta.

1. Selecciona los números cuyo producto es 600, y que además están en la razón 4:6; considera que si el producto es 600, un número es x y el otro $\frac{600}{x}$, al plantear la ecuación: $\frac{4}{6} = \frac{x^2}{600}$, y resolverse, se sabe que los números que cumplen con la condición son:

   A) 20 y 30 **B)** –20 y 30 **C)** 20 y –30 **D)** ±20 y ±30

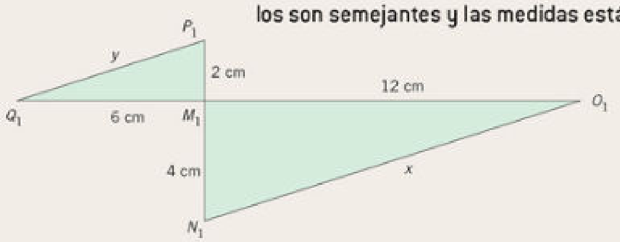
2. Determina los números que cumplen con la siguiente condición: el número cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado.

   A) 6 y –1 **B)** –6 y 1 **C)** 6 y 1 **D)** –6 y –1

3. Escoge el número que multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado.

   A) 8 y –5 **B)** –8 y 5 **C)** –8 y –5 **D)** 8 y 5

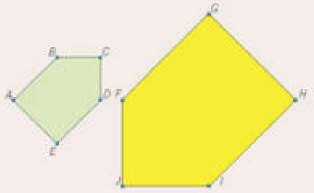
4. Elige la opción que determina la medida correcta de *x* y *y*, considerando que los triángulos son semejantes y las medidas están dadas en centímetros.

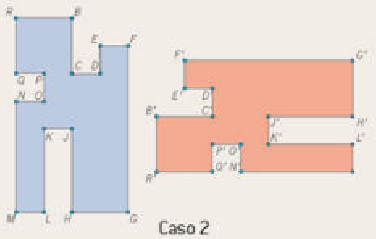


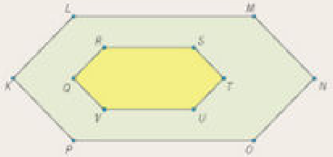
   A) $x = 12.6$ cm, $y = 6.32$ cm
   B) $x = 16$ cm, $y = 8$ cm
   C) $x = 12$ cm, $y = 24$ cm
   D) Ninguna de las anteriores

› Realiza lo que se indica en cada caso.

5. Identifica si las parejas de polígonos son semejantes, congruentes o ninguna de las anteriores. Argumenta tu respuesta.


Caso 1


Caso 2


Caso 3

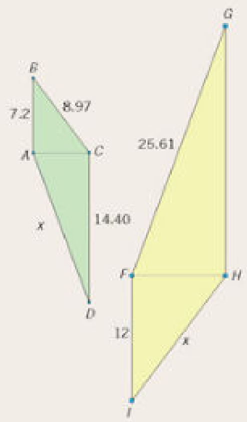
6. Plantea un problema donde se estudie la semejanza y congruencia de triángulos, empleando los datos de los triángulos del reactivo 4. ______________________

© SANTILLANA

7. Los polígonos que se muestran son semejantes. Halla la medida del lado *x* en cada caso:

   a. En el polígono verde, x = ____________

   b. En el polígono amarillo, x = ____________



8. ¿La medida del perímetro del polígono amarillo es tres veces mayor que la medida del perímetro del polígono verde? Explica tu respuesta. ______________________

9. Determina si las siguientes aseveraciones son verdaderas (V) o falsas (F).

Oración	Veracidad
Las expresiones algebraicas que tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y con $a \neq 0$, se conocen como ecuación cuadrática.	
En la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, el signo ± significa que x puede obtener más de dos valores y por ello la expresión se debe resolver para $x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.	
Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones; si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática solo tiene una solución, y si $b^2 - 4ac < 0$, es decir, un número negativo, la ecuación cuadrática no tiene solución o soluciones.	

10. Corrige y escribe las oraciones que sean falsas de manera que comuniquen información verdadera. ______________________

Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Utiliza los términos *siempre*, *a veces* o *poco*, y completa la tabla.

Indicadores			
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.		Resuelvo problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	

En clase externa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.

© SANTILLANA

BLOQUE 4

Invitación a la lectura

Historia de la trigonometría

El estudio de la trigonometría se inició en la Antigüedad. En la civilización mesopotámica, los antiguos babilonios lograron aproximar las medidas de los ángulos y las longitudes de los lados de triángulos rectángulos, como se demuestra en la tablilla Plimpton 322, en la cual hay una columna de números interpretada como una tabla de funciones trigonométricas. Por su parte, los egipcios establecieron la medición de ángulos en grados, minutos y segundos.

En la Grecia antigua, en el siglo II a. de C., Hiparco de Nicea construyó una tabla de cuerdas para resolver triángulos. A partir de los ángulos, esta indicaba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central, dado que corta a una circunferencia de radio r.

Trescientos años después, el astrónomo Tolomeo contribuyó notablemente a la trigonometría. En su obra *Almagesto* incluyó una tabla de cuerdas, junto con la explicación del método para compilarla y ejemplos de cómo usarla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos.

Al mismo tiempo, los astrónomos de India desarrollaron un sistema trigonométrico basado en la función seno, que era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada.

Los astrónomos árabes retomaron los conocimientos trigonométricos de la Grecia antigua e India. A finales del siglo VIII trabajaron con la función seno y para el siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También, demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría. Además, sugirieron usar un valor $r = 1$, lo que originó los valores modernos de las funciones trigonométricas.

El cálculo y uso de funciones trigonométricas continuaría en los siguientes siglos. La trigonometría árabe se difundió en Europa y, en el siglo XV, el matemático y astrónomo alemán Johann Müller escribió el primer trabajo en esta materia. En el siglo XVII, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Newton encontró la serie para el sen x, para el cos x y para la tan x.

Finalmente, con la invención del cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, en el que todavía hoy son fundamentales tanto en la matemática pura como en la aplicada.

› **Subraya la respuesta correcta y contesta.**

1. Los babilonios son considerados iniciadores del estudio de la trigonometría por...
   A) definir las funciones trigonométricas.
   B) medir los ángulos en grados.
   C) aproximar la medida de los ángulos y lados de triángulos rectángulos.
   D) construir tablas de cuerdas.
2. Es un aporte de los antiguos matemáticos griegos:
   A) Definición de la función seno
   B) Medición de los ángulos en grados
   C) Uso del valor $r = 1$
   D) Construcción de tablas de cuerdas
3. ¿Qué importancia tiene el trabajo de los matemáticos árabes en la trigonometría? ____________________
4. ¿Cuál fue el principal aporte de Isaac Newton a la trigonometría? ____________________

© SANTILLANA

Reloj solar, Londres, Inglaterra. El primer reloj creado por el ser humano fue el solar y se atribuye a los egipcios; sin embargo, la primera civilización en medir el paso del tiempo utilizando el ángulo solar y la longitud de la sombra que proyectaba una vara clavada en el suelo, fue China, aproximadamente 2700 años antes de Cristo. Este fue el comienzo de la trigonometría.

Presentación del bloque

© SANTILLANA

Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

21

Sucesiones cuadráticas

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

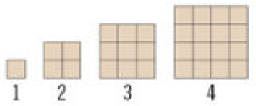
Sucesión lineal y sucesión cuadrática

1. Analiza la información y resuelve en el cuaderno. Justifica cada respuesta.

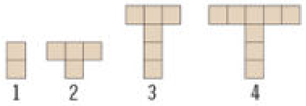
a. Juan, Karla y Mónica están estudiando el tema de sucesiones en su clase de Matemáticas. La maestra les presentó las siguientes reglas: $2n$ y n^2.

- ¿Las expresiones representan la misma sucesión? Justifica tu respuesta.

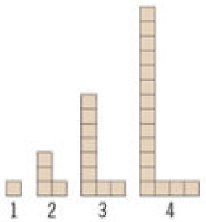
b. La maestra también mostró las siguientes sucesiones de figuras, que hacen referencia a las reglas mencionadas. Responde en tu cuaderno.



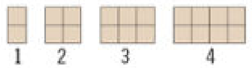
Sucesión 1



Sucesión 2



Sucesión 3



Sucesión 4

- ¿Qué sucesión o sucesiones corresponden a la regla $2n$? Argumenta tu respuesta.
- ¿Cuáles corresponden a la regla n^2? ¿Por qué?

c. Considera que las reglas dadas se refieren a la base y altura de las sucesiones de figuras.

- ¿Qué sucesión corresponde a la regla $2n$?
- ¿Cuál a la regla n^2?
- ¿Cómo varía el valor de los términos en cada regla?
- Uno de los términos de una de las sucesiones es 529, ¿a qué sucesión pertenece? ¿A qué número de término corresponde?

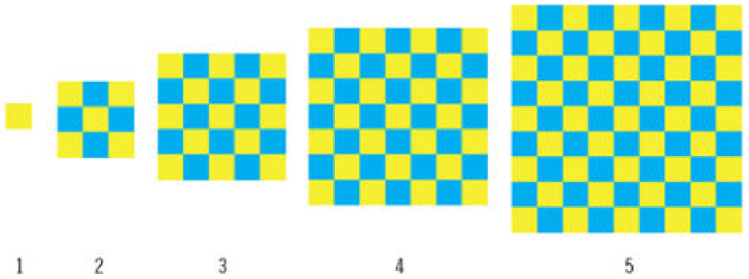
› Socializa tus argumentos y, con ayuda del profesor, valídalos con el grupo.

© SANTILLANA

Expresión general cuadrática

2. Analicen en pareja la información y respondan, justificando cada respuesta.

José se dedica a colocar losetas. Luis, su hijo, le comenta que en la forma de ponerlas se muestra un patrón y que esto se puede describir con base en una regla. Luis puso como ejemplo la siguiente sucesión:



a. Completen la tabla que relaciona el número de figura con la cantidad de losetas.

Tabla 1

Figura	1	2	3	4	5	6	7	12	n
Número de losetas									

- Describan cómo obtuvieron el número de losetas para las figuras 6, 7 y 12. ______
- ¿Qué patrón observan entre la diferencia de figuras consecutivas? ______
- ¿Cómo pueden determinar la regla de la sucesión? ______

› Comenten en grupo sus propuestas y lleguen a acuerdos.

Una manera de determinar la regla de la sucesión de losetas es mediante el siguiente análisis.

b. Completen la tabla para los primeros diez términos de la sucesión n^2.

Tabla 2

Núm. de término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Valor del término											

- ¿Qué valores, y de qué términos, se relacionan con la sucesión de las losetas? ______
- ¿Qué característica tienen estos términos? ______
- ¿Cuál es la regla que genera la sucesión de los números pares, es decir, 2, 4, 6, 8,...? ______

© SANTILLANA

c. En la siguiente tabla, anoten los primeros diez términos de la sucesión de números impares y determinen la regla.

Tabla 3

Núm. de término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Valor del término											

- ¿Cuál es la relación entre los valores de las tablas 2 y 3 con los valores de la tabla 1? ______
- Si la regla de la sucesión de la tabla 3 se eleva al cuadrado, ¿cuál es el valor de los primeros siete términos? ______
- Con base en lo anterior, ¿cuál es la regla de la sucesión de losetas? ______

d. Analicen la siguiente información y respondan.

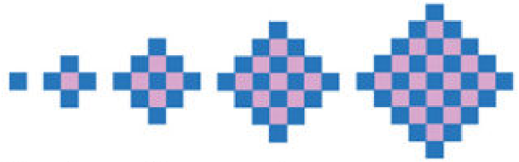
La regla de una sucesión cuadrática es una expresión algebraica que tiene la forma $an^2 + bn + c$, en la que n representa al enésimo término.

- De las reglas obtenidas hasta el momento, ¿cuáles son cuadráticas? ______

› Socialicen sus respuestas y valídenlas con el resto del grupo y el profesor.

3. Continúen trabajando en pareja y resuelvan las actividades.

El señor José también pondrá losetas en la cocina. La forma de colocarlas generó la siguiente sucesión:



1 2 3 4 5

a. La tabla muestra la relación que existe entre el número de figura y el ancho o alto de cada una. Supongan que la sucesión es infinita y completen la tabla 4.

Tabla 4

Figura	1	2	3	4	5	6	52	53	1 051	n
Ancho o alto de la figura	1	3								

- ¿La regla que genera dicha sucesión es cuadrática? Justifiquen su respuesta. ______

b. La tabla 5, de la siguiente página, relaciona el número de figura y la cantidad de losetas de color morado. Complétenla y precisen la regla que genera dicha sucesión.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Tabla 5

Figura	1	2	3	4	5	6	52	53	1 051	n
Losetas moradas	1	4	9							

- ¿La regla que genera dicha sucesión es cuadrática? ¿Por qué? ______

c. La tabla 6 relaciona el número de figura con la cantidad de losetas color de rosa. Complétenla e indiquen la regla que genera esta sucesión.

Tabla 6

Figura	1	2	3	4	5	6	52	53	1 051	n
Losetas rosas	0	1	4							

- ¿La regla de esta sucesión es cuadrática? Argumenten. ______
- A partir de las reglas obtenidas, escriban una expresión algebraica que represente la regla de la sucesión de losetas. ______

d. Verifiquen la regla algebraica de la sucesión, completando la tabla 7.

Tabla 7

Figura	1	2	3	4	5	6	52	53	1 051	n
Total de losetas	1	5	13							

- ¿De qué tipo es la regla que genera la sucesión?
- De la regla que modela la sucesión del total de losetas, ¿cuántos términos algebraicos tiene la expresión?
- ¿La regla algebraica $2n^2 - 2n + 1$ es la que obtuvieron para modelar la sucesión? Si no es el caso, verifiquen si la expresión a la que llegaron y esta última son equivalentes.

e. Los datos de la tabla 8 tienen relación con las figuras de las losetas, pero falta determinar qué dato debe ir en la primera fila. Analicen las sucesiones anteriores para saber cuál es.

Tabla 8

Figura	1	3	5	7	9	11	13	...
Total de losetas	1	5	13	25	41	61	85	...

- ¿Qué información se indica en la primera fila?
- ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la regla que modela la sucesión de la tabla 8? Subráyala.

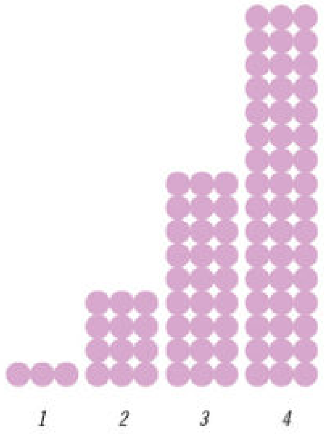
• $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ • $\frac{n^2+1}{2}$ • $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ • $\frac{n^2-1}{2}$

› Socialicen sus argumentos y validen sus resultados. Comenten en grupo acerca de la estrategia a seguir para encontrar la regla de una sucesión cuadrática. Registren en el cuaderno sus acuerdos.

Más reglas de sucesiones cuadráticas

4. **Realicen en equipo lo que se indica.**

a. Analicen la sucesión de círculos y respondan.



- ¿Cuál es la regla que genera la sucesión de círculos? Expliquen la forma como llegaron a ella. ______
- ¿Cuál es el número de círculos que hay a lo alto en cada figura? ______
- ¿Cuántos círculos tendrá a lo alto la figura 5? ______
- ¿Qué relación hay entre el número de término y los círculos a lo alto? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que muestra la relación anterior? ______
- ¿Cuántos círculos hay a lo ancho en cada figura? ______
- Si relacionan su respuesta anterior con una expresión algebraica, ¿cuál es la expresión algebraica que se obtiene? ______
- ¿Es esta la regla de la sucesión de círculos que se muestra? Aplíquenla para comprobar su respuesta.
- Comparen esta regla con la que obtuvieron antes, ¿son las mismas?, ¿en qué difieren? ¿Cuál es la regla algebraica correcta?

b. La siguiente tabla se relaciona con la sucesión de figuras que se muestra del lado izquierdo; analícenla y respondan.

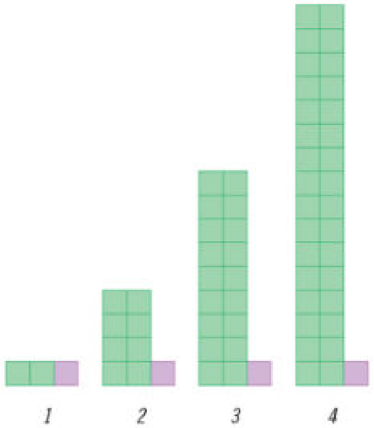


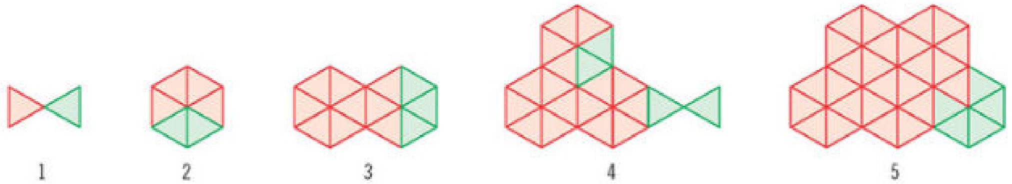
Figura	1	2	3	4	...	10
Cuadrados	3	9	19	33	...	201

- ¿Cuál es la regla que genera la sucesión de cuadrados? ______
- ¿Cuál es el número de cuadrados que hay a lo alto en cada figura? ______
- ¿Cuántos cuadrados tendrá a lo alto la figura 5? ______
- ¿Qué relación hay entre el número de término y los cuadrados a lo alto? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que muestra la relación anterior? ______
- ¿Cuántos cuadrados verdes hay a lo ancho en cada figura? ______
- Si relacionan su respuesta anterior con la expresión algebraica que obtuvieron, ¿cuál es la nueva expresión? ______
- ¿Qué hay que agregar a la expresión anterior para obtener la regla de la sucesión de cuadrados? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Cuál es la regla algebraica que modela la sucesión? ______
- ¿Es la misma expresión que obtuvieron antes? ¿En qué difieren? ______

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Analicen la siguiente sucesión de triángulos y respondan.



- ¿Cuál es el número de triángulos en cada figura? ______
- ¿Cuál es la relación entre el número de triángulos rojos de cada figura? ______
- Lo anterior se puede escribir con una expresión algebraica, ¿cuál? Expliquen su respuesta. ______
- ¿Cuál es la relación entre el número de triángulos verdes de cada figura? ______
- Plantea la expresión algebraica que modela la sucesión de triángulos. ______
- Con base en las últimas dos expresiones algebraicas, determinen la regla o expresión algebraica para la sucesión de triángulos. ______
- ¿Esta es una sucesión cuadrática? ¿Por qué? ______

› Comparen sus resultados con los de otros equipos y valídenlos con la ayuda del profesor. Si existen dudas o diferencias, discutan para llegar a acuerdos.

5. **Analicen la siguiente lista de sucesiones y respondan en su cuaderno.**

- 3, 8, 15, 24, 35, 48,...
- 5, 8, 13, 20, 29, 40,...
- 5, 9, 15, 23, 33, 45,...

a. ¿Cuál de las sucesiones se obtiene a partir de la regla algebraica $n^2 + n + 3$?
b. Obtengan la regla algebraica que modela las otras dos sucesiones.

› Socialicen sus argumentos y, con ayuda del profesor, valídenlos con el resto del grupo. Entre todos registren sus conclusiones acerca del trabajo de la lección.

Reto Sucesión cuadrática con racionales

1. **Reunidos en pareja, realicen en su cuaderno lo que se pide.**

Analicen la siguiente sucesión: $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{3}$, 3, $5\frac{1}{3}$, $8\frac{1}{3}$, 12, $16\frac{1}{3}$, $21\frac{1}{3}$...

a. Elaboren una tabla. ¿Cuál es la regla algebraica que modela la sucesión?
b. ¿Cuántos términos algebraicos tiene la regla que modela la sucesión?
c. ¿Cuál es el coeficiente que multiplica a la literal cuadrática?

› Discutan en grupo sus experiencias; anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

Ingresa al siguiente sitio web, practica con el interactivo y realiza lo que se solicita.

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_328_g_4_t_2.html?open=activities&from=topic_t_2.html

Resuelve las cuatro actividades que se plantean y determina qué sucesiones son cuadráticas y cuáles son las reglas algebraicas que las modelan.

Comparte tu experiencia con el interactivo en grupo y discute con tus compañeros tus conclusiones. Si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

22 Sólidos de revolución

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

El patinaje sobre hielo surgió como medio de transporte en las zonas frías. Actualmente es un deporte olímpico.

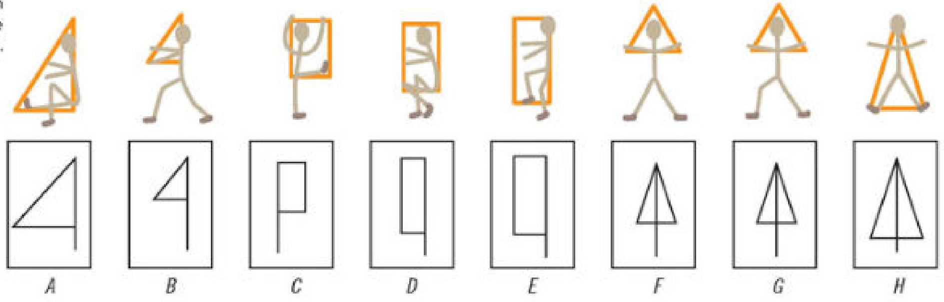
Patinaje artístico

1. Organizados en equipo, realicen lo que se pide.

a. Lluvia asistió a un concurso de patinaje artístico y notó que las patinadoras, al realizar algunos movimientos en distintas posiciones, lograban formar en el aire algunos cuerpos geométricos.

- Observen la fotografía de la patinadora; si girara hacia la derecha, utilizando como eje de rotación la punta de su pie, ¿qué cuerpo geométrico generaría con su movimiento? ______
- Comenten su respuesta con otros equipos. Usen dibujos para validarla.

b. Lluvia investigó algunas posiciones y movimientos básicos del patinaje artístico e hizo los trazos correspondientes para poder anticipar qué cuerpos se generan en el aire con los giros.



c. Escriban qué cuerpo geométrico se puede generar con los trazos y completen la tabla.

Trazo	A	B	C	D	E	F	G	H
Cuerpo geométrico								

- ¿Es posible generar el mismo cuerpo con diferentes trazos? ¿Por qué? ______

› Socialicen sus anticipaciones y propongan maneras de verificarlas.

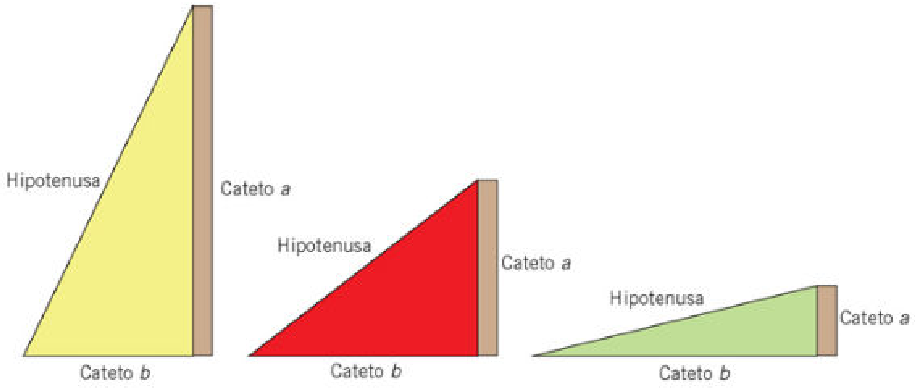
© SANTILLANA

© SANTILLANA

2. Realicen las siguientes actividades para validar si se forman los cuerpos que registraron en la tabla.

Para llevar a cabo las actividades, necesitarán cartoncillo o *foami*, palos de madera, tijeras y cinta adhesiva.

a. En cartoncillo o *foami* tracen tres triángulos rectángulos como los siguientes. Si lo consideran pueden reproducir las figuras a una escala mayor.



- Recorten los triángulos, usen el rectángulo café como pestaña para pegar el palo.
- Giren el palo al que pegaron cada triángulo rectángulo.

b. Registren en la tabla las características del cuerpo geométrico que se formó al girar cada triángulo sobre su eje.

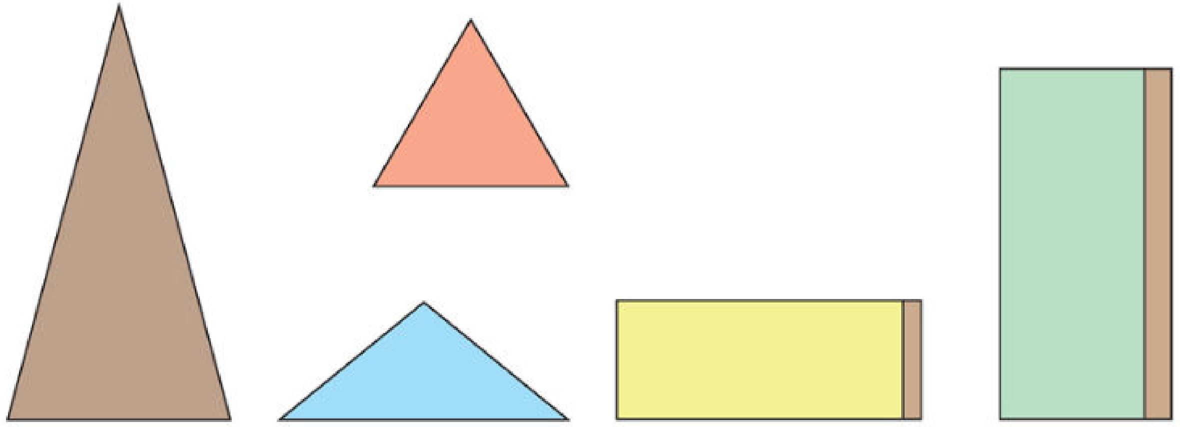
	Triángulo rectángulo		
	Amarillo	**Rojo**	**Verde**
Cuerpo geométrico			
Forma de las bases			
Forma de las caras			
Número de vértices			

- ¿Se generará el mismo cuerpo geométrico con cualquier triángulo rectángulo? ¿Por qué? ______
- ¿Qué diferencias identifican entre los cuerpos geométricos que se generan al girar los triángulos? ______
- ¿Cómo es el cuerpo que se crea cuando el cateto *a* es de mayor longitud que el cateto *b*? ______
- ¿Qué pasa cuando la longitud del cateto *a* disminuye o es la medida de menor longitud en el triángulo rectángulo? ______

› Comparen los resultados que obtuvieron con los que anticiparon. Si hubo diferencias, identifiquen a qué se debieron. En grupo lleguen a conclusiones.

c. En cartoncillo o *foami* tracen las figuras que se proponen y recórtenlas.

- Peguen un palo de madera sobre la altura de los triángulos.
- En el caso de los rectángulos, peguen los palos en el área café.
- Giren el palo al que pegaron cada figura geométrica.



d. Registren en la tabla las características del cuerpo geométrico que se formó.

	Triángulo			Rectángulo	
	Isósceles café	Isósceles azul	Equilátero	Amarillo	Verde
Cuerpo					
Forma de las bases					
Forma de las caras					
Número de vértices					

- ¿Cuáles son las diferencias entre los cuerpos que se forman al girar los tres triángulos? ______
- ¿Se genera el mismo cuerpo geométrico al girar cualquier triángulo? ¿Por qué? ______
- ¿Por qué en el caso de los triángulos rectángulos el eje de rotación es un cateto y en los triángulos isósceles y equilátero este pasa por el centro de la base y el vértice opuesto a esta? ______
- ¿Qué cuerpo geométrico se genera al girar un rectángulo? ______
- ¿Aplica para cualquier rectángulo? ¿Por qué? ______

› Socialicen sus respuestas y argumentos. Registren sus conclusiones y acuerdos con apoyo del profesor.

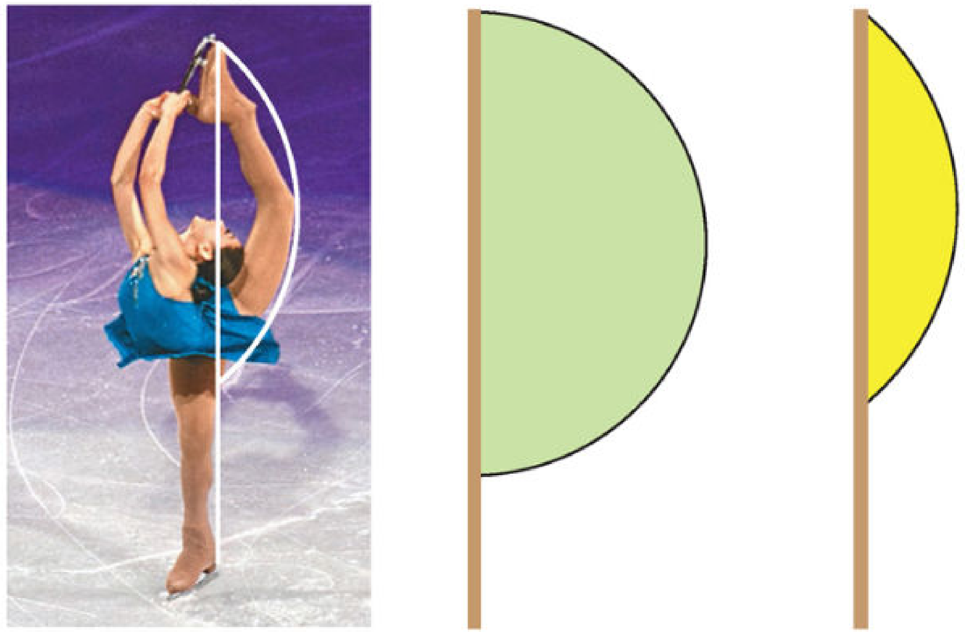
© SANTILLANA

Giros en el patinaje

3. En pareja, realicen lo que se pide.

a. Para responder la actividad inicial, Lorena trazó un arco en la fotografía de la patinadora, como se muestra en la imagen.

- Tracen en cartoncillo o *foami* una semicircunferencia y un arco.
- Recorten sus trazos y péguenlos en los palos, como se muestra a continuación.



- Giren sobre su eje las figuras construidas y registren en la tabla las características de los cuerpos geométricos que se generan.

	Semicircunferencia	Arco
Cuerpo geométrico		
Forma de las bases		
Forma de las caras		
Número de vértices		

- ¿Qué diferencias hay entre los cuerpos que se formaron al girar la semicircunferencia y el arco? ______
- Expliquen a qué se debe esto. ______
- Comparen sus resultados con los de la actividad inicial. Si es necesario, corrijan.

› En grupo, comenten sus resultados y, con ayuda del profesor, elaboren conclusiones acerca de las características de los cuerpos geométricos que se generan al girar sobre un eje: triángulos, curvas y rectángulos.

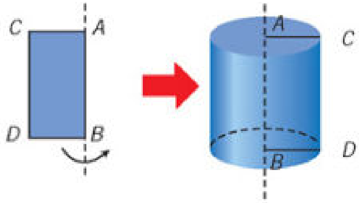
© SANTILLANA

4. En grupo, lean la siguiente información y complementen sus conclusiones.

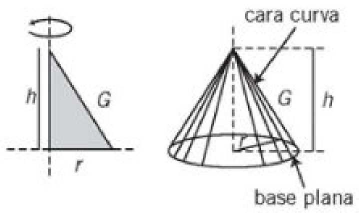
Los **cuerpos de revolución** son aquellos sólidos que se obtienen al girar una figura plana, alrededor de un **eje de rotación**. El **cilindro**, el **cono** y la **esfera** son sólidos de revolución.

La **esfera** se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

El **cilindro** es el cuerpo generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados. En el esquema de la derecha, el lado *AB* es el eje de giro o **eje del cilindro** y es la altura del sólido. El lado *CD* produce la superficie lateral del cilindro y se denomina **generatriz**. De los lados *AC* y *BD* resultan dos círculos que son las bases del cilindro.



El **cono** se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El cateto fijo es el eje del cono y la longitud de dicho cateto es la altura. La rotación del otro cateto genera un círculo perpendicular a la altura y corresponde a la **base del cono**; la longitud de esta base es el radio del cono. La hipotenusa del triángulo que se rota es la **generatriz**. El punto de intersección de la generatriz con el eje se llama **vértice del cono**.



› Propongan otros procedimientos para obtener sólidos de revolución y verifíquenlos.

Otros procedimientos para formar sólidos

5. Organizados en equipos, reúnan el siguiente material y realicen las actividades.

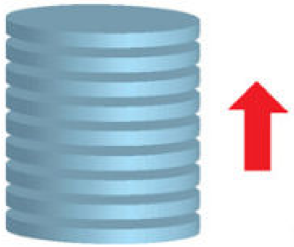
- Un rectángulo de papel de 15 cm de largo
- Diez fichas del mismo tamaño

a. Tomen el rectángulo por uno de sus lados y, sin doblarlo, júntenlo con su lado opuesto y péguenlo con una cinta adhesiva.

- ¿Cómo son las bases del sólido que se formó? ______

b. Construyan una fila de fichas y desplácenla de abajo hacia arriba, como se muestra en la imagen.

- ¿Qué cuerpo resulta cuando una ficha se traslada en dirección perpendicular al plano que lo contiene? ______



c. Comenten con sus compañeros qué cuerpos se generaron con estos procedimientos.

› En grupo, comenten sus experiencias y resultados.

© SANTILLANA

Desarrollos planos de conos y cilindros rectos

6. En pareja, realicen las actividades que se indican.

a. Consideren las características de las figuras que al rotarse generan conos y cilindros y describan cómo sería el desarrollo plano de estos cuerpos.

- Cilindro. ______
- Cono. ______

b. Consigan tubos de cartón de diferentes tamaños, como los que se muestran en la imagen, y corroboren sus anticipaciones acerca de las características del desarrollo plano del cilindro.

- Elijan un tubo y tracen en cartoncillo o *foami* dos círculos, tomen en cuenta la medida de una de sus bases para hacer las "tapas".
- Tracen en el tubo un segmento de recta perpendicular a la base y recorten el tubo por esta línea.
- Abran el tubo, alísenlo y cálquenlo en el mismo material en que trazaron los círculos.
- Repitan el procedimiento anterior con cada uno de los tubos que llevaron.

c. Numeren los desarrollos planos que hicieron. En su cuaderno, hagan una tabla como la que se muestra y registren las medidas de los desarrollos planos.

	Desarrollo plano			
Número de cilindros	Altura (cm)	Radio (cm)	Longitud del rectángulo (cm)	Perímetro de la base (cm)
Cilindro 1				

- ¿En su primer planteamiento consideraron trazar la tapa? ¿Por qué? ______
- ¿Qué relación identifican entre el perímetro de la base y la longitud del rectángulo? ______
- ¿Es correcto afirmar que la cara curva del cilindro corresponde en su desarrollo plano a un rectángulo? Argumenten. ______
- Contrasten sus resultados con las características que habían propuesto inicialmente. Si lo consideran necesario, corrijan.

d. Construyan los desarrollos planos de dos cilindros con las medidas que se indican. Al trazarlos dejen una pestaña para pegarlos y poder armarlos.

- Radio de 5 cm y 12 cm de altura
- Diámetro de 8 cm y 8 cm de altura

› Expongan sus cilindros al resto del grupo y comenten cómo los hicieron.

© SANTILLANA

e. Consigan conos de los que se usan para beber agua y hagan lo que se solicita.

- Tracen la circunferencia, que corresponderá a la tapa.
- En el cono, tracen un segmento de recta como se muestra en la imagen.
- Recórtenlo por la línea.
- Extiendan y alisen el cono y cálquenlo en cartoncillo o *foami*.

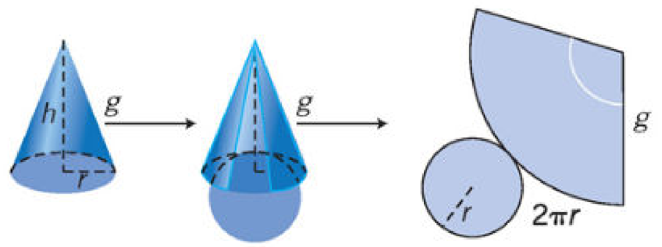
- Determinen la medida de la altura del cono. ______________________
- ¿Cuál es la medida de la generatriz? ______________________
- ¿Cuánto mide el radio de la base del cono? ______________________
- ¿Cuál es la medida del perímetro de la base del cono? ______________________
- ¿Qué relación hay entre el perímetro de la base y la longitud del arco de la circunferencia? ______________________

› Muestren sus trabajos al resto de sus compañeros, compartan sus experiencias y comenten sus respuestas. Verifiquen que sean correctas con el profesor.

f. Analicen la información y aplíquenla al resolver las actividades que se solicitan.

Por el teorema de Pitágoras la generatriz g de un cono es: $g = \sqrt{h^2 + r^2}$, donde h es la altura del cono y r el radio de su base.

g. Analicen los trazos que hicieron un par de alumnos y respondan.



- Si se sabe que el radio mide 2 cm y la altura del cono es de 4 cm, ¿cuál es la medida de la generatriz? ______________________
- Subrayen el procedimiento con el que se obtiene la medida de la generatriz de un cono cuyo radio mide 4.5 cm y su altura 6 cm.

$g^2 = h^2 + r^2$	$g^2 = h^2 + r^2$	$g^2 = h + r$
$g^2 = 6^2 + 4.5^2$	$g^2 = 4.5^2 + 6$	$g^2 = 4.5 + 6$
$g^2 = 36 + 20.25$	$g^2 = 20.25 + 6$	$g^2 = 10.5$
$g = \sqrt{56.25}$	$g = \sqrt{26.25}$	$g = \sqrt{10.5}$
$g = 7.5$ cm	$g = 5.1$ cm	$g = 3.2$ cm

› Expliquen su razonamiento para encontrar la respuesta correcta. Identifiquen los errores en los otros procedimientos y coméntenlos en clase.

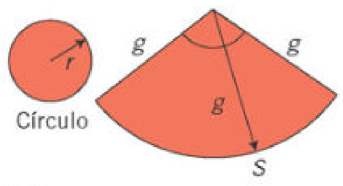
© SANTILLANA

7. **En equipo, lean y resuelvan.**

a. Lean y contesten lo que se pide.

El desarrollo plano de un cono está formado por un círculo y un sector circular, cuyo radio es igual a la generatriz g del cono y cuyo arco S tiene la misma longitud que el perímetro de la circunferencia de la base.

La medida del ángulo del sector circular se calcula con la fórmula: $a = 360\left(\frac{r}{g}\right)$, donde r es el radio de la base del cono y g es la generatriz.

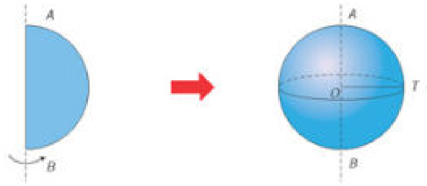


- Si la generatriz de un cono mide 7.6 cm, y su radio 2.5 cm, ¿cuál es la medida del ángulo del sector circular? ______________________
- ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo que determina el arco de circunferencia y la medida del perímetro de la circunferencia de la base? ______________________
____
- Entre ellas, ¿se puede establecer una relación de proporcionalidad? Expliquen. ______________________
____

› Socialicen sus argumentos y registren sus conclusiones.

b. Observen la siguiente figura y analicen la información propuesta.

Como se dijo antes, la esfera es el cuerpo generado por un semicírculo que gira alrededor de su diámetro. Al punto O se le llama centro de la esfera y el segmento OT es el radio de la esfera. La esfera no tiene desarrollo plano.



- Discutan por qué la esfera no tiene un desarrollo plano como el cono o el cilindro.

› Socialicen sus argumentos y, con ayuda del profesor, concluyan.

Reto Sólidos de revolución

1. En pareja, redacten las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje y completen la tabla.

	Triángulo rectángulo	Semicírculo	Rectángulo
Características del cuerpo de revolución que se genera.			

2. Elijan un sólido de revolución, planteen un problema que implique obtener las medidas del cuerpo seleccionado y construir su desarrollo plano.

› Discutan en grupo sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

En los siguientes sitios podrás ampliar la información sobre la generación de los sólidos de revolución.

concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/revol3.htm

matematicasysudidactica0809.pbworks.com/w/page/20505007/cuerpos_redondos_hexagono_matematico

Discute con tus compañeros el contenido de las páginas y analicen los ejemplos propuestos. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

23

Pendiente de una recta

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Relaciones lineales del tipo $y = kx$ y la pendiente

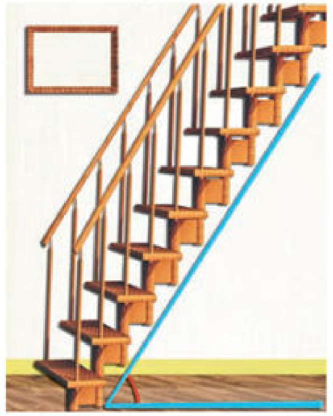
1. En pareja, lean la información y contesten lo que se solicita.

Braulio es carpintero y debe hacer dos escaleras para el patio de un centro de convenciones. Así que presentó dos propuestas, considerando que la inclinación de estas determina la facilidad para subirlas. Es decir, las escaleras más empinadas son más difíciles de subir, que aquellas en las que el ángulo de inclinación es menor.

a. Analicen ambas propuestas y respondan.

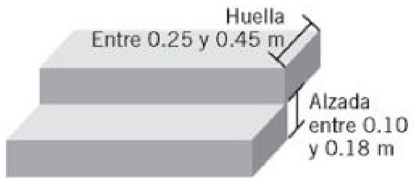
Propuesta A

Propuesta B



- ¿Cómo es la inclinación de ambas escaleras? Expliquen.
  Propuesta A. ____________________
  ____
  Propuesta B. ____________________
  ____
- ¿Qué diferencias hay entre ambas propuestas? ____________________
  ____
- ¿Cómo puede determinarse la medida de la inclinación de las escaleras? ____________________
  ____
  ____

› Socialicen sus respuestas y planteen, en grupo, un procedimiento para validar su conjetura acerca de cómo medir el ángulo de inclinación de las escaleras.



2. Retomen la información anterior y resuelvan.

a. Braulio comentó que las medidas recomendadas para construir escaleras son las que se muestran en la imagen.

- Retomen sus conclusiones iniciales y determinen cómo pueden obtener la medida de la inclinación de la escalera con los datos de Braulio. Justifiquen su respuesta. ____________________
  ____

© SANTILLANA

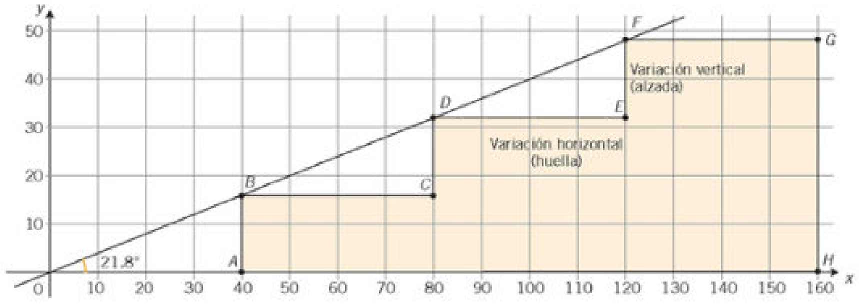
© SANTILLANA

- ¿La medida de los ángulos que se forman en los trazos realizados en las propuestas de Braulio tienen relación con la inclinación de la escalera? Argumenten su respuesta. ____________________
- Consideren las medidas menores tanto de la huella como de la alzada y calculen la razón entre estas. ____________________
- Hagan lo mismo con las medidas mayores de la huella y de la alzada. ____________________
  ____
- Discutan si la razón que hay entre la huella y la alzada determina el ángulo de inclinación de la escalera.

b. Braulio decidió que las escaleras tendrán las siguientes medidas:

- Escalera A: 40 cm de huella y 16 cm de alzada
- Escalera B: 30 cm de huella y 12 cm de alzada
- ¿Cuál es la inclinación de cada escalera? ____________________
  ____
- En cada caso, ¿todos los escalones tienen la misma inclinación? ¿Por qué? __________
  ____
- ¿Qué escalera tendrá mayor inclinación? ____________________

c. Un método para determinar la inclinación de una rampa o una escalera consiste en encontrar el grado de inclinación de la recta. En este caso, la alzada y la huella pueden relacionarse geométricamente como la variación vertical y horizontal entre dos puntos de una recta, respectivamente.



Braulio comentó que "la inclinación de la recta es proporcional a la razón entre la alzada y la huella, o bien, entre la variación vertical y horizontal de cada escalón. A la razón entre la variación vertical y horizontal se le llama **pendiente** y está relacionada con la inclinación de la recta".

- ¿Están de acuerdo con lo que afirma Braulio? ________ ¿Por qué? ____________________
  ____
- Comparen este método con el que propusieron en la actividad inicial. ¿Usaron como estrategia esta razón para dar respuesta a los planteamientos anteriores? Argumenten. ____________________

d. Calculen la pendiente de las escaleras dadas las siguientes medidas. Apliquen la razón $P = \frac{vv}{vh}$, donde P es la pendiente, vv es la variación vertical y vh la variación horizontal. Escriban sus resultados en la columna "Medida de la pendiente".

Huella (cm)	Alzada (cm)	Medida de la pendiente	Medida del ángulo con respecto del eje *x* (°)
37.5	15		
40	16		
42.5	17		
34	13.6		
28	11.2		

- ¿Qué medidas conviene usar para construir las escaleras *A* y *B*? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Qué relación identifican entre esta información y la medida del ángulo que se forma al intersecarse las rectas trazadas en las propuestas *A* y *B* de la actividad inicial? ______

› Comenten sus respuestas con sus compañeros y, con ayuda del profesor, concluyan cómo calcular la medida de la pendiente.

Rampas de acceso

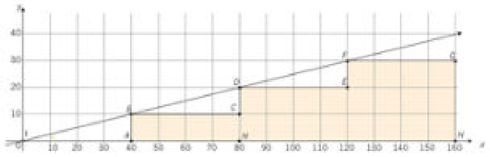
3. En equipo, hagan lo que se solicita.

a. Braulio diseñó dos rampas de acceso. Analicen las propuestas que trazó y calculen la pendiente en ambos casos.

Propuesta C

Propuesta C

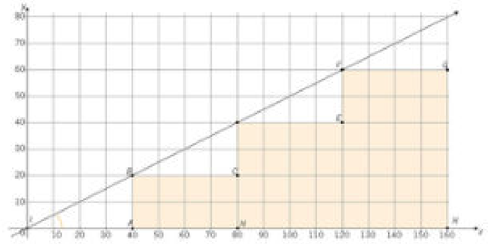
Pendiente: ______



Propuesta D

Propuesta D

Pendiente: ______



© SANTILLANA

- ¿Qué diferencias o semejanzas se pueden establecer entre las gráficas de las propuestas C y D? ______
- En ambas propuestas establezcan la medida del ángulo de la pendiente.

Propuesta C: ______ Propuesta D: ______

b. Describan las características de las pendientes. Completen la tabla.

Características	Propuesta *C* Pendiente	Propuesta *D* Pendiente
Puntos de intersección con el eje de las abscisas		
Medida del ángulo de inclinación con respecto del eje *x*		
Expresión algebraica que la representa.		

› Comenten sus respuestas con sus compañeros y lleguen a un acuerdo.

c. En la propuesta C, consideren los ΔABI, ΔCDB, ΔEFD formados por la recta y el eje de las abscisas. Midan los catetos opuestos y adyacentes del ángulo de la pendiente en cada triángulo. Después registren sus mediciones en la tabla.

	ΔABI	ΔCDB	ΔEFD
Cateto opuesto (*CO*)			
Cateto adyacente (CA)			
Cociente $\frac{CO}{CA}$			

- ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta y el cociente de los catetos? ______

d. Lean el siguiente texto.

Al valor del cociente del cateto opuesto entre cateto adyacente se le conoce como **tangente** del ángulo α. Es decir, de la pendiente.

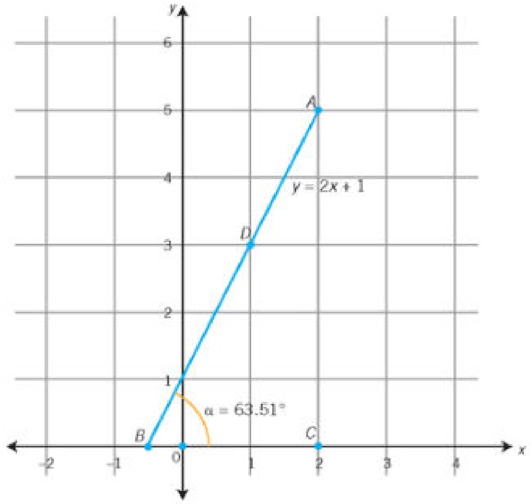
- En la propuesta D, determinen el valor de la tangente del ángulo α, que se forma en ΔABI, ΔCDB, ΔEFD. ______

› Comenten sus respuestas con otros equipos. Discutan qué tipo de rampa es la que conviene construir y argumenten por qué. Si tienen dudas, resuélvanlas con ayuda del profesor.

© SANTILLANA

Relaciones lineales del tipo $y = kx + b$ y pendiente

4. De manera individual, realiza lo que se solicita.



a. En la imagen de la izquierda se muestra una recta asociada a la función del tipo $y = kx + b$.

- ¿Qué características tienen este tipo de rectas? ¿Por qué? ______

b. Traza el segmento AC. En relación con el ángulo α, determina el cateto opuesto y el cateto adyacente del ΔABC.

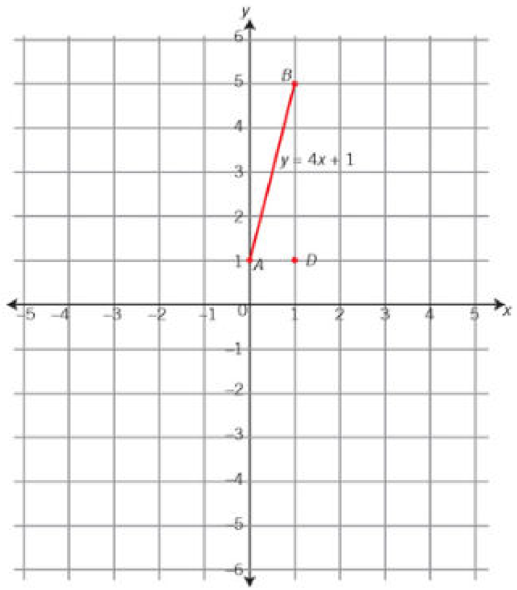
- Mide los catetos y obtén la pendiente. ______

c. Traza una recta paralela al eje de las x, de manera que pase por el punto D. Construye el triángulo rectángulo ADE.

- Mide los catetos y obtén la pendiente. ______

d. Analiza el ΔABC y el ΔADE. Observa que en el ΔABC uno de sus catetos coincide con el eje de las x, pero que en ΔADE no sucede lo mismo. Compara la medida de sus pendientes y, con base en tus respuestas, plantea una conclusión de lo realizado. ______

› Comparte tus experiencias con tus compañeros de grupo.



e. Traza el triángulo rectángulo ABD.

- Asigna las medidas necesarias a los catetos y obtén la medida de la pendiente; se sabe que el ángulo BAD mide 76°.
- Prolonga la recta asociada a la función $y = 4x + 1$, de manera que cruce el eje de las x. Traza el triángulo rectángulo correspondiente y obtén la medida de la pendiente.
- Contrasta tu generalización anterior con los resultados obtenidos. ¿Qué puedes concluir? ______

› Comenta tus conclusiones con el grupo. Registra los acuerdos que concluyan con ayuda del profesor.

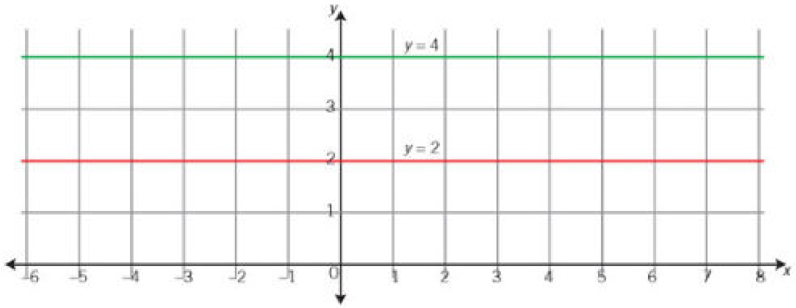
© SANTILLANA

Relaciones lineales del tipo $y = b$ y la pendiente

5. Reunidos en pareja, realicen lo que se solicita.

a. En la imagen se muestran dos rectas asociadas a una función del tipo $y = b$.

- ¿Qué características tiene en general este tipo de rectas? Expliquen. ______

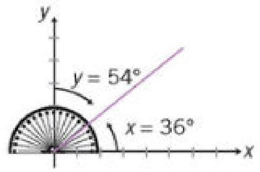


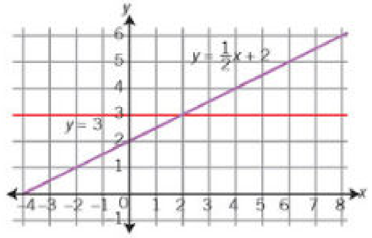
- Discutan cómo obtener la medida de la pendiente de la recta que modela la función $y = 4$.
- ¿Cuál es la medida de la pendiente de este tipo de rectas? Expliquen. ______

b. En equipo, lean la información y hagan lo que se indica.

El ángulo de inclinación de una recta que se describe a través de una función puede tener los siguientes casos:

- Si esta pasa por el origen, se modela como la función $y = kx$, donde k es la pendiente de la recta, y los valores asociados a k pueden ser positivos o negativos.
- Si esta no pasa por el origen, se modela como la función $y = kx + b$, donde k es la pendiente de la recta, los valores asociados a k pueden ser positivos o negativos.
- Otra función que no pasa por el origen es $y = b$, cuya pendiente tiene valor cero, y donde los valores asociados a b, pueden ser positivos o negativos.





Cuanto mayor sea la medida de la pendiente, mayor es el ángulo de inclinación de la recta respecto del eje x. Cuanto mayor sea la medida del ángulo de inclinación de una recta respecto del eje x, mayor es la medida de su pendiente.

- Tracen en su cuaderno las rectas que representan las escaleras de la tabla de la página 190.
- Utilicen un transportador y determinen la medida del ángulo de inclinación que se forma entre la recta y el eje de las abscisas. Registren sus resultados en la tabla de la página 190, en la columna "Medida del ángulo" con respecto del eje x.

› Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si hay dudas, con ayuda del profesor lleguen a acuerdos.

© SANTILLANA

Tangente

6. En pareja, hagan lo que se solicita.

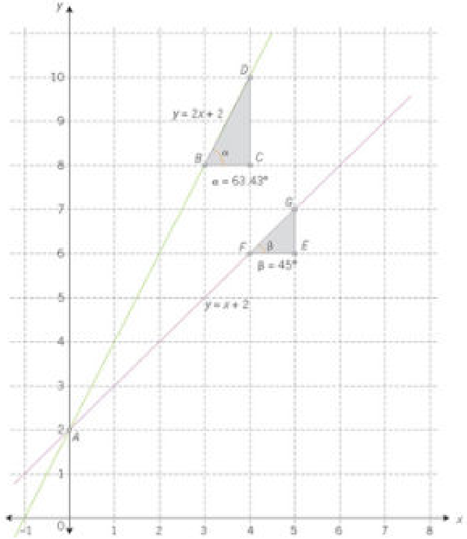
En la tabla se registraron las medidas de algunos ángulos que se forman al trazar una familia de funciones lineales que pasa por el origen del eje de coordenadas.

a. Obtengan el valor de la tangente del ángulo que se crea en cada uno de los casos. Si lo consideran necesario, tracen los triángulos en su cuaderno.

Ángulos	10°	25°	40°	45°	55°	70°	75°	80°	85°
Valor de la tangente									

› Socialicen en grupo sus resultados. Si surgieron dudas en los procedimientos que siguieron, pidan ayuda al profesor.

b. La figura muestra dos rectas asociadas a funciones lineales, con los triángulos *BCD* y *EFG*.



- ¿Se trata de rectas de una misma familia? Expliquen. ______
- Consideren los valores de los ángulos α y β de ΔBCD y ΔEFG y obtengan el valor de la tangente del ángulo que se forma en cada uno de los casos. Determinen en qué caso la medida de la tangente es mayor y qué significado pueden asociarle a ello. ______
- Tracen una recta asociada a una función lineal cuya medida de la tangente del ángulo que se forma al trazar un triángulo rectángulo sea menor que los obtenidos antes. Expliquen lo realizado. ______

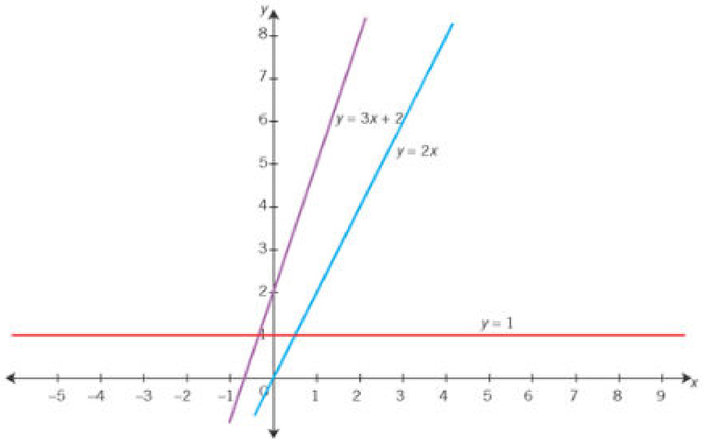
© SANTILLANA

- ¿Qué relación existe entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente de los catetos? ______

› Comenten en grupo sus respuestas y valídenlas con ayuda del profesor.

7. En pareja, realicen lo que se pide.

a. Determinen la pendiente de las rectas asociadas a funciones lineales y argumenten lo realizado.



- Recta roja: ______
- Recta azul: ______
- Recta morada: ______

› Socialicen en grupo. Argumenten y lleguen a acuerdos. Expliquen las relaciones de semejanza que hay entre los triángulos construidos.

Reto — La pendiente de una recta

1. En pareja, hagan lo que se solicita.

- En su cuaderno, tracen diferentes rectas asociadas a funciones de la forma $y = ax$, $y = ax + b$. Determinen la medida del ángulo de inclinación y la medida de la tangente.
- Planteen un problema que se resuelva con las rectas que trazaron.

› Comenten sus respuestas con sus compañeros. Con la ayuda del profesor, discutan sus experiencias y lleguen a acuerdos.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás conocer cómo se obtiene la pendiente de una recta conociendo su ángulo de inclinación.
http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_023/index.html
Comenta con tus compañeros la información que se encuentra en la página. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

24 Ángulos agudos de un triángulo rectángulo

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Ángulos y triángulos rectángulos

1. **En pareja, hagan lo que se solicita y respondan.**

   a. Tracen un triángulo rectángulo.

   - Nombren y midan los ángulos del triángulo rectángulo.
   - Determinen cuál de los lados del triángulo rectángulo es la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente, de los ángulos agudos, respectivamente. ______________________________

❯ Socialicen en grupo. Registren los acuerdos y lleguen a una conclusión.

   b. Héctor comentó que *el cateto adyacente de un triángulo rectángulo es aquel que forma parte del ángulo al cual se hace referencia. El cateto opuesto es el lado que no forma parte del ángulo que se toma como referencia y se encuentra enfrente de este.* Luego, realizó el siguiente esquema:

   - ¿Están de acuerdo con lo que afirma Héctor? ¿Por qué? ______________________________

❯ Busquen información en un medio electrónico o impreso para complementar sus respuestas. Socialícenla y, con ayuda del profesor, lleguen a una conclusión.

© SANTILLANA

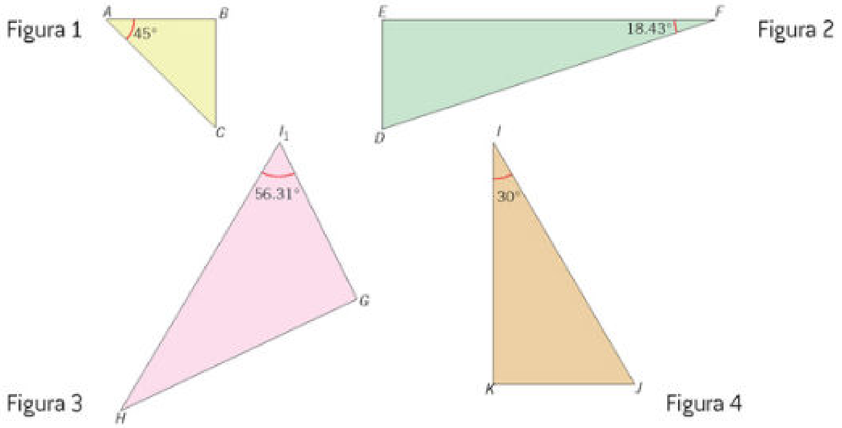
© SANTILLANA

Hipotenusa y catetos

2. **Resuelvan en parejas.**

   a. Consideren la afirmación de Héctor y, con base en ella, establezcan en cada triángulo la hipotenusa (H), el cateto opuesto (CO) y el cateto adyacente (CA) al ángulo marcado.

   - Determinen el valor de los ángulos faltantes en cada caso.

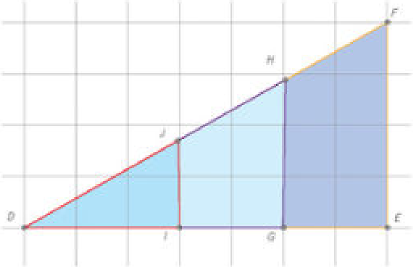


   - Expliquen el procedimiento que siguieron para obtener el valor de los ángulos.

❯ Expongan sus respuestas y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

3. **En equipo, realicen lo que se pide.**

   a. Observen la imagen de la derecha y midan los ángulos que se indican para responder:



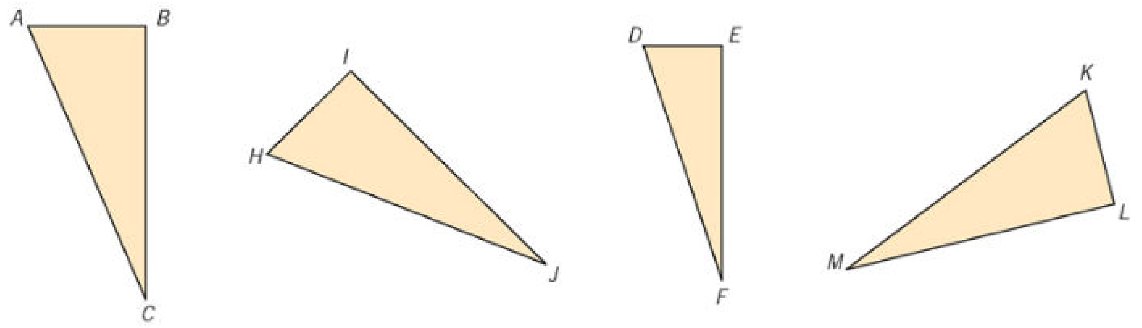
   - ¿Cuánto miden los ángulos JDI, HDG, FDE? ______________
   - ¿Qué relación hay entre las medidas de los tres ángulos? ______________
   - ¿Cuánto miden los ángulos DJI, DHG y DFE? ______________
   - Si se prolonga el segmento DF y DE, de manera que se forme un cuarto triángulo, ¿qué sucede con la medida del ángulo que se forma en D? ______________________________
   - ¿Qué tipo de ángulo se crea? ______________________________

   b. Consideren que cada unidad cuadrada mide 1. ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos rectángulos DEF y DHG? ______________ ¿Y con respecto del triángulo DIJ? ______________________________

   - ¿Qué relación pueden establecer entre una familia de triángulos semejantes y la medida, en este caso, de los ángulos DJI, DHG y DFE? ______________

❯ Comenten en grupo sus respuestas y registren, en el cuaderno, sus conclusiones.

c. Analicen la siguiente familia de triángulos. Se sabe que al menos tres de ellos son triángulos congruentes.



- ¿Cuáles son los triángulos rectángulos que cumplen con la condición dada? Argumenten. ____________________

____

d. Lean la siguiente información y, con base en esta, validen la respuesta anterior.

Los triángulos rectángulos, cuyos ángulos agudos son de igual medida, cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- Son triángulos congruentes si la medida de sus lados es la misma para todos.
- Son triángulos semejantes si la medida de sus lados correspondientes es proporcional.

e. Tracen triángulos rectángulos, cuyos ángulos agudos sean de igual medida.

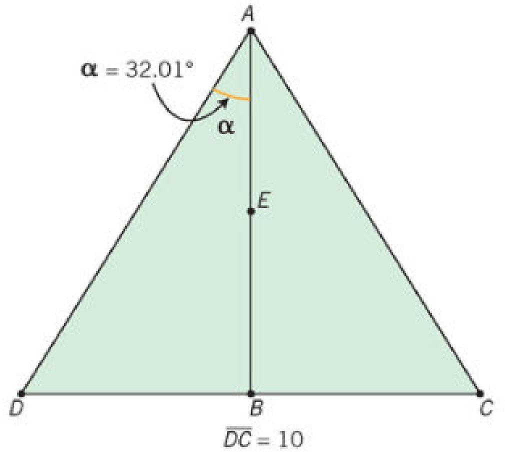
› Muestren sus construcciones a sus compañeros y expliquen si estos son semejantes o congruentes. Argumenten su respuesta.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

4. En equipo, analicen el ΔACD y hagan lo que se solicita.

a. Consideren que AB es la altura del triángulo isósceles ACD.



- Analicen el ΔABD y determinen la medida del cateto opuesto (CO) del ángulo α. ______
- ¿Cuánto mide el cateto adyacente (CA) al ángulo α en el ΔABD? ______

____
- ¿Cuál es la medida de la hipotenusa del ΔABD? ______
- Obtengan el cociente de la medida del cateto opuesto al ángulo α sobre la medida de la hipotenusa (H). ______
- Obtengan el cociente de la medida del cateto adyacente al ángulo α sobre la medida de la hipotenusa. ______

b. Tracen una recta R_1 paralela al segmento DC, que pase por el punto medio de AB (E). Marquen los puntos de intersección entre R_1 y los segmentos AC y AD. Llámenlos F y G.

- Identifiquen el ΔAFE y respondan.
- ¿Cuánto mide el cateto opuesto al ángulo α? ______
- ¿Cuánto mide el cateto adyacente al ángulo α? ______
- ¿Cuánto mide la hipotenusa del ΔAFE? ______
- Obtengan los siguientes cocientes:
  - $\frac{CO}{H} =$ ______
  - $\frac{CA}{H} =$ ______
- Comparen los cocientes que obtuvieron en los triángulos ADB y AFE y expliquen qué relación encuentran entre estos. ______

____

____

- ¿Qué sucede con los cocientes de $\frac{CO}{H}$ y $\frac{CA}{H}$ en los ΔABC y ΔAEG? ______________

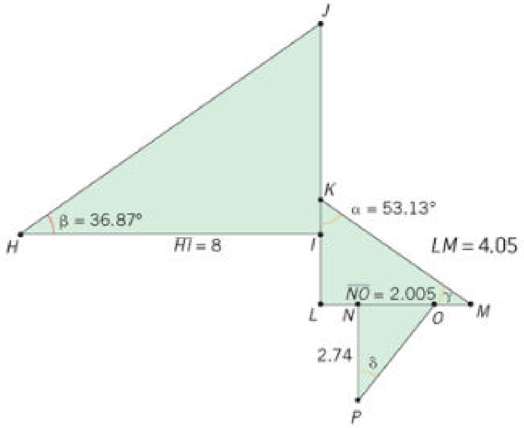
____

- Analicen la veracidad de la siguiente afirmación.

La medida de los cocientes $\frac{CA}{H}$ y $\frac{CO}{H}$ es siempre la misma cuando se trata de triángulos semejantes.

c. Para verificar o refutar el enunciado anterior, con base en los triángulos propuestos, completen los datos de la tabla.

Para realizar las operaciones pueden hacer uso de la calculadora. Acuerden con sus compañeros y profesor las cifras decimales con las que es conveniente operar.



Triángulo rectángulo	Ángulo	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$
HIJ	β		
KLM	γ		
NOP	δ		

› Comenten con el grupo sus resultados. Argumenten sus respuestas. Con la ayuda del profesor definan acuerdos.

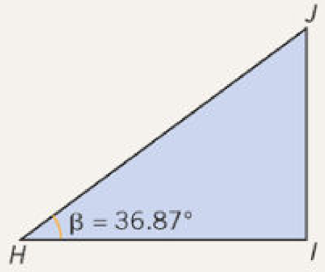
d. En grupo, lean y analicen la información.

- Para establecer las razones de los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, se necesita conocer al menos el valor de uno de sus ángulos. Estas son ***razones trigonométricas***.
- Por ejemplo, en el caso del ΔHIJ, se sabe que 36.87° es la medida del ángulo β y que la razón entre dos lados del triángulo rectángulo es constante. Es decir, para el ΔHIJ se definen las razones trigonométricas para el ángulo agudo β, como se muestra en la tabla de la siguiente página.

© SANTILLANA

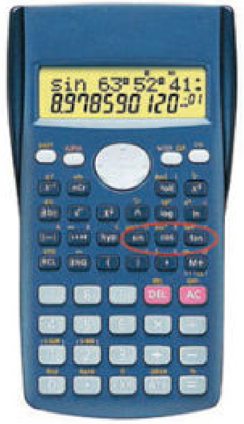
© SANTILLANA

Razón trigonométrica	Definición	*HIJ*
Sen β	Cateto opuesto a β entre la hipotenusa	$\frac{JI}{HJ}$
Cos β	Cateto adyacente a β entre la hipotenusa	$\frac{HI}{HJ}$
Tan β	Cateto opuesto a β entre el cateto adyacente a β	$\frac{JI}{HI}$



› Relacionen la información con las conclusiones que plantearon en el inciso c.

5. Consigue una calculadora científica y haz lo que se te indica.



a. Explora tu calculadora e identifica las teclas asociadas a las funciones seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan), que se señalan en la imagen de la derecha. Si lo consideras necesario, lee el manual para que puedas usarla correctamente.

b. Obtén el seno y el coseno de los ángulos y compáralos con los cocientes obtenidos en la tabla del inciso c del punto 4.

- ¿Los resultados coinciden con la medida de los ángulos que hay en el inciso c de la actividad 4? Justifica. ______________

____

- ¿Los cocientes que resultan de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa son constantes? ¿Por qué? ______________

____

› Comenta con tus compañeros los resultados que obtuviste. Con ayuda del profesor validen sus respuestas y registren en el cuaderno sus conclusiones acerca de lo estudiado.

6. En equipo, contesten lo que se plantea.

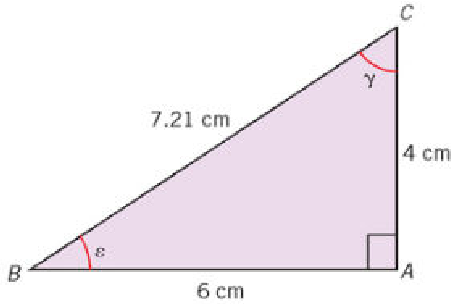
a. Analicen si la afirmación es verdadera:

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre son complementarios, ya que suman 90°.

- Con base en el triángulo de la derecha argumenten la afirmación.

____

____

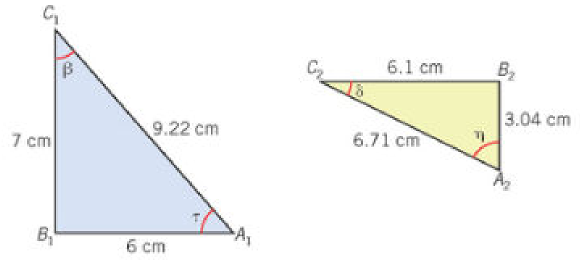


b. Nombren los lados que corresponden a la hipotenusa, al cateto opuesto y al cateto adyacente, según el ángulo indicado en el triángulo de la página anterior y calculen las razones trigonométricas y completen la tabla.

Razón trigonométrica	Ángulo	Valor
Sen	(γ)	
	(ε)	
Cos	(γ)	
	(ε)	
Tan	(γ)	
	(ε)	

- ¿Qué relación identifican entre el seno de un ángulo y el coseno del complemento del ángulo obtenido de la función seno? ______
- ¿Cuál es el coseno de un ángulo que mide 45°? ______

c. Nombren los lados que corresponden a la hipotenusa, cateto opuesto y cateto adyacente, según el ángulo indicado en cada uno de estos triángulos.



d. Calculen las razones trigonométricas y completen la tabla. Luego, respondan las preguntas y justifiquen cada caso.

Triángulo $\Delta A_1B_1C_1$		
Razón trigonométrica	Ángulo	Valor
Sen	(β)	
	(τ)	
Tan	(β)	
	(τ)	
Cos	(β)	
	(τ)	

Triángulo $\Delta A_2B_2C_2$		
Razón trigonométrica	Ángulo	Valor
Sen	(δ)	
	(η)	
Tan	(δ)	
	(η)	
Cos	(δ)	
	(η)	

- ¿Qué relación hay entre el coseno de un ángulo y la tangente del mismo ángulo y el coseno del ángulo complementario? ______
- ¿Qué relación se establece entre la tangente de un ángulo y el seno del complemento del ángulo obtenido de la función seno? ______

© SANTILLANA

e. Comparen las respuestas que obtuvieron en los tres triángulos y comenten si estas fueron las mismas en los tres casos. Expliquen a qué se debe esto.

7. En pareja, hagan los cálculos y completen la tabla.

Medida del ángulo	Seno	Coseno
35°	0.574	
55°	0.819	

- Expliquen cómo obtuvieron la medida del coseno en los casos anteriores. ______
- Obtengan el producto de la tangente de un ángulo de 35° por la tangente de un ángulo de 55°. ______
- ¿Qué conclusión pueden plantear con base en lo trabajado? ______

a. En equipo, lean la siguiente información:

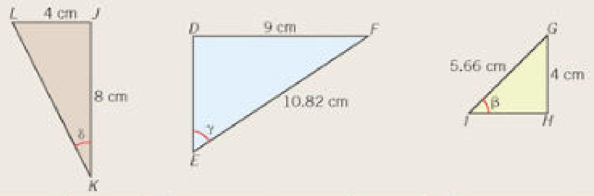
El **seno de un ángulo** es igual al coseno de su ángulo complementario. La **tangente** de un ángulo es recíproco o inverso multiplicativo a la tangente del complemento de su ángulo.

- Retomen la información y validen las respuestas anteriores.

› Hagan acuerdos finales respecto de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera.

Reto — Razones trigonométricas

1. En pareja, escriban las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) para cada uno de los triángulos rectángulos.



Razón trigonométrica	Δ *DEF*
Sen (γ)	
Cos (γ)	
Tan (γ)	

Razón trigonométrica	Δ *GHI*
Sen (β)	
Cos (β)	
Tan (β)	

Razón trigonométrica	Δ *JKL*
Sen (δ)	
Cos (δ)	
Tan (δ)	

2. Elijan un triángulo del punto 1 y planteen un problema que se pueda resolver con los cálculos obtenidos.

› Comenten sus experiencias en grupo. Anoten las dificultades o dudas que enfrentaron y, con ayuda del profesor, resuelvan.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio encontrarás la tabla de las razones trigonométricas asociadas a lo que has estudiado en esta lección.

www.sectormatematica.cl/proyectos/tabla.htm

(consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

25

Razones trigonométricas

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Ángulos agudos en triángulos rectángulos

1. **Haz los trazos y responde.**

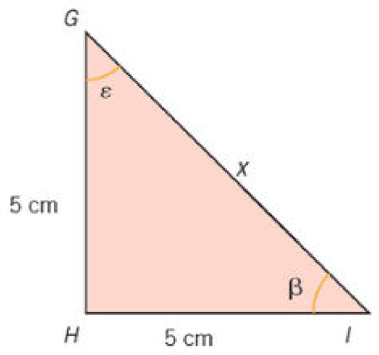
   a. Traza un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos mida 35° y calcula el valor de la tangente para ese ángulo.

   b. Traza un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos mida 50° y calcula el valor del coseno para ese ángulo.

   - ¿Un mismo triángulo puede cumplir con las dos condiciones anteriores? ¿Por qué? ______

   c. Al trazar los triángulos y al relacionar los lados y los ángulos, un alumno determinó lo siguiente: *Sen (35°) = 0.5; Cos (50°) = 0.6*

   - ¿Estás de acuerdo con lo que obtuvo? ¿Por qué? ______



2. **En pareja, hagan lo que se solicita y resuelvan.**

   a. La medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles que se muestra es de 5 cm.

   - ¿Cuánto mide la hipotenusa? ______
   - ¿Cuánto mide el ángulo ε? ______ ¿Y el ángulo β? ______

© SANTILLANA

© SANTILLANA

   b. Calculen el valor del seno, coseno y tangente para el ángulo ε. Expresen la igualdad y completen la tabla.

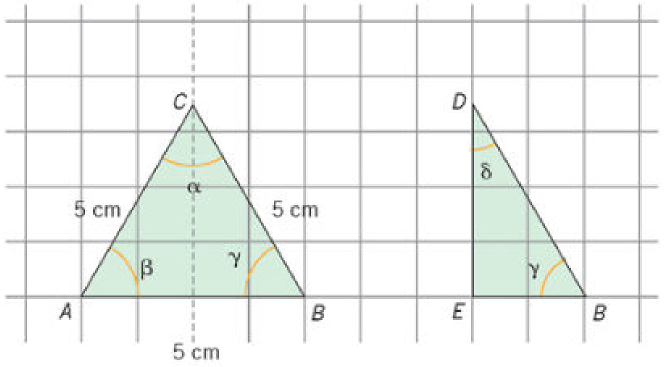
Razones trigonométricas	Valor numérico
Sen (ε)	
Cos (ε)	
Tan (ε)	

   - ¿Los valores obtenidos serán los mismos para el ángulo β? ______ ¿Por qué? ______

› Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten cómo las obtuvieron. Con una calculadora científica, verifiquen los resultados de la tabla.

3. **En equipo, realicen lo que se solicita.**

   a. Analicen el ΔABC, describan todas las características y propiedades que conozcan acerca de este tipo de triángulo.



   - Obtengan la medida de los ángulos α, β y γ.

     α: ______ β: ______ γ: ______

   - ¿Qué tipo de triángulos se forman al trazar una de las alturas del ΔABC? ______

   b. Analicen el ΔDEB, apliquen el teorema de Pitágoras y encuentren la medida del cateto opuesto al $\angle\gamma$.

   - ¿Cuánto mide el $\angle\delta$? ______
   - ¿Cuánto mide el cateto adyacente al $\angle\gamma$? ______

› Comenten sus respuestas y procedimientos con sus compañeros. Corrijan si lo consideran necesario.

c. Lean y discutan la siguiente información.

Si se tiene un triángulo rectángulo cualquiera y se conocen las medidas de sus lados y de uno de sus ángulos agudos, se le pueden asociar tres **razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**

d. Determinen el valor del seno, coseno y tangente para el ángulo γ y completen la tabla.

Razones trigonométricas	Valor numérico
Sen (γ)	
Cos (γ)	
Tan (γ)	

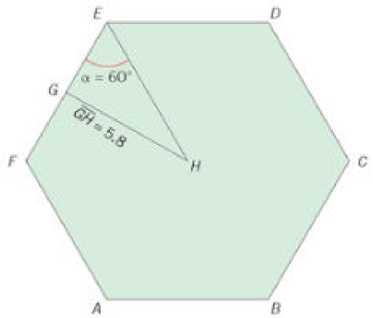
e. Analicen los valores de seno, coseno y tangente asignados a los ángulos de 30°, 45° y 60°, los cuales son ángulos notables.

Ángulo	Sen	Cos	Tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

- ¿Qué relación pueden establecer entre los datos que proporciona la tabla con la exploración que hicieron? ______________________
____

› Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Con ayuda del profesor, valídenlas.

f. Dado el hexágono que se muestra, determinen la medida de su perímetro.



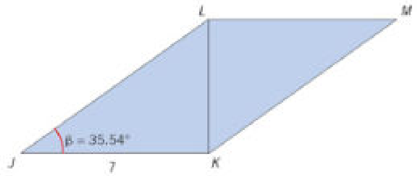
- ¿Cuál es la medida de cada uno de sus lados? ______________________
- Expliquen por qué calcular las razones trigonométricas con respecto del ángulo α es de utilidad para determinar la medida del perímetro del hexágono.

© SANTILLANA

Resolución de problemas con razones trigonométricas

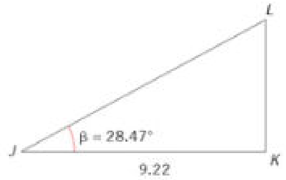
4. En pareja, resuelvan y respondan.

a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.



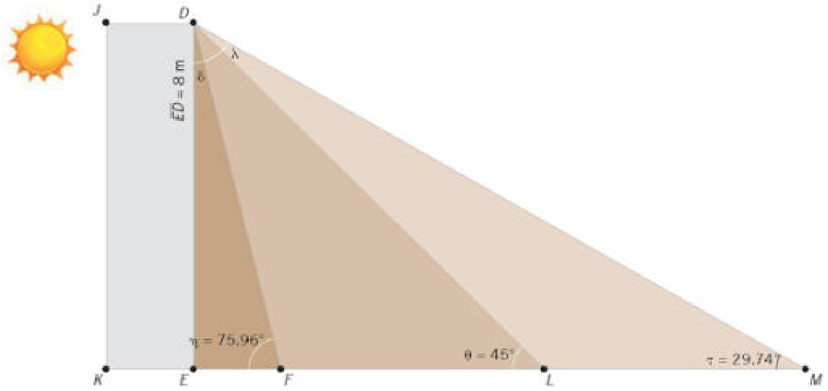
- ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ______________
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ______________
- ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ______________
- Verifiquen su resultado.

b. El ΔJKL es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.



- Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.

c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.



- Si el edificio está representado por el rectángulo $JDEK$, ¿qué sucede con los ángulos η, y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ______________
- Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.

- $\overline{EF}$. __________ • $\overline{EL}$ = __________ • $\overline{EM}$ = __________

© SANTILLANA

d. Determinen los valores y completen la tabla. Ingresen a la página www.sectormatematica.cl/proyectos/tabla.htm para consultar las tablas trigonométricas o hagan los cálculos con su calculadora.

Ángulo	Medida	Sen	Cos	Tan
δ				
$\delta+\kappa$				
$\delta+\kappa+\lambda$				

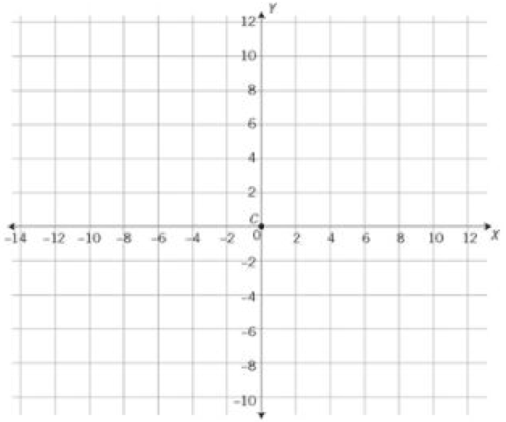
- Interpreten los datos anteriores en el contexto del problema.

› Externen sus respuestas y argumentos. Después, con ayuda del profesor concluyan.

La circunferencia y algunas de las razones trigonométricas

5. Resuelve lo que se solicita.

a. En el plano cartesiano, traza una circunferencia con centro en el origen, punto C cuya medida del radio sea 10.



- Traza un ángulo de 53° de manera que coincida con el radio de la circunferencia sobre el eje horizontal; llámalo α.
- Marca el punto donde se intersecan la circunferencia y el lado del ángulo α que no coincide con el eje x; llámalo A.
- Traza una recta perpendicular al eje x que pase por el punto A, marca sobre el eje de las abscisas el punto B y obtén el triángulo rectángulo CAB.
  - ¿Cuáles son las coordenadas del punto A? ______
  - Divide el valor de la segunda coordenada entre 10 y escribe el cociente. ______
  - Aplica la razón $\text{sen } \alpha = \frac{CO}{H}$ y establece la medida de seno de α: ______

© SANTILLANA

- Compara los cocientes que obtuviste en los dos puntos anteriores. ¿Cómo son los valores obtenidos? ______

b. Traza en la circunferencia anterior los ángulos que se indican y completa la tabla.

Ángulo	Sen (usando datos de la circunferencia)	Sen (aplicando la razón: $sen = \frac{CO}{H}$)
12°		
37°		
78°		

- ¿Cuál de los dos métodos es más preciso? ______
- ¿Qué ventajas o desventajas identificas en cada uno de los métodos estudiados? ______

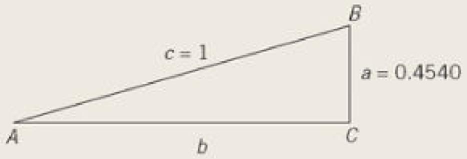
› Socializa en grupo tus respuestas y argumentos.

Reto Cálculos trigonométricos

1. En pareja, resuelvan los siguientes problemas.

a. Calculen el valor de las razones trigonométricas a partir del valor de una de ellas.

- Sen A = 0.4540
- Cos A = ______
- Tan A = ______
- Sen B = ______
- Cos B = ______
- Tan B = ______



- Obtengan la medida del área y del perímetro del triángulo ABC.
- Obtengan la medida de los ángulos.

b. Determinen la medida del largo y ancho del rectángulo. Registren sus operaciones y expliquen el procedimiento que siguieron.

c. Planteen un problema, asociado al rectángulo del inciso b, que se pueda resolver con los cálculos obtenidos.

› Comenten sus resultados con sus compañeros. Con ayuda del profesor lleguen a acuerdos.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio repasa lo que sabes acerca de las razones trigonométricas de un ángulo agudo cualquiera.

concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/trigo1.htm

Discute con tus compañeros la información de la página y analicen los ejemplos propuestos.

Si te surgieron dudas, consúltalas con el profesor. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

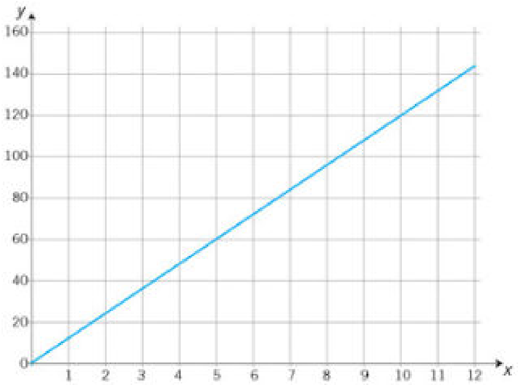
26 Razón de cambio y pendiente de una recta

Eje: Manejo de la información
Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Razón consumo-distancia

1. Analiza la información y responde. Justifica cada respuesta.



Roberto es ingeniero automotriz, una de sus funciones es diseñar y adecuar el consumo de combustible (litros de gasolina por kilómetro) de los automóviles que se lanzan a la venta. La gráfica de la izquierda muestra las condiciones de consumo que deben cumplirse cuando un automóvil se desplaza a 90 km/h de manera constante.

a. Con base en la información proporcionada, ¿qué datos se modelan en el eje de las abscisas? ______

- ¿Qué información se modela en el eje de las ordenadas? ______
- ¿Es posible determinar el consumo de combustible por cada kilómetro? ______

b. ¿Cuántos litros de gasolina se consumen por 5 km recorridos? ______

- Escribe la relación anterior como el par ordenado (x_1, y_1). ______

c. ¿Cuántos litros de gasolina se gastan por 10 km recorridos? ______

- Escribe la información como par ordenado (x_2, y_2). ______

d. Lee la información teórica y responde las preguntas.

Siempre que dos variables (magnitudes) están relacionadas mediante una función, se puede estudiar el cambio relativo de una respecto de la otra, a lo cual se le conoce como **razón de cambio** (r); esta razón de cambio se puede dar cuando se ubican dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la relación funcional y, a partir de esto, se obtiene el cociente de y_2 menos y_1 entre x_2 menos x_1, es decir, $r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

- A partir de lo anterior, ¿cuál es la razón de cambio del problema planteado? ______
- ¿Qué representa el resultado anterior? ______

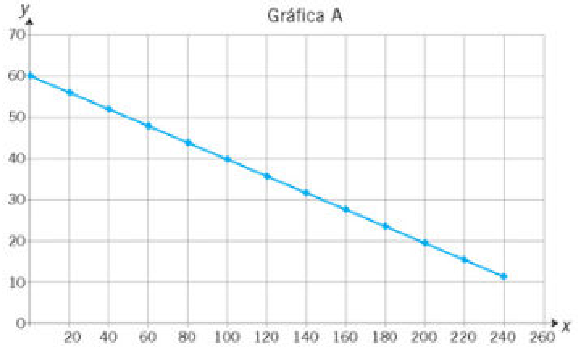
› Socializa tus argumentos y, con ayuda del profesor, valídalos con el resto del grupo.

© SANTILLANA

Cálculo de la razón de cambio

2. Analicen en pareja la información y realicen lo que se solicita.

Las gráficas representan dos fenómenos distintos, referidos a una misma situación.



a. Escriban una misma situación que se modele con ambas gráficas.

- Gráfica A: ______
- Gráfica B: ______

b. Para obtener la razón de cambio en la gráfica A, ¿qué par ordenado (x_1, y_1) pueden utilizar? ¿Por qué? ______

- ¿Qué par ordenado (x_2, y_2) pueden usar? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio? ______

c. Para obtener la razón de cambio en la gráfica B, ¿qué par ordenado (x_1, y_1) pueden emplear? Justifiquen. ______

- ¿Qué par ordenado (x_2, y_2) pueden utilizar? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio? ______

d. Como pudieron notar, la razón de cambio obtenida en ambas gráficas es distinta.

- ¿Qué otra característica distingue las gráficas? ______
- Reflexionen. ¿Cómo afecta lo anterior a cada gráfica? ______
- Describan cuáles son las características de una función lineal y si las gráficas A y B la representan.

e. Elijan dos pares ordenados en cada gráfica y calculen la razón de cambio.

- ¿Qué observan? ¿Qué relación hay con los resultados que obtuvieron antes?

› Socialicen sus argumentos y valídenlos con el resto del grupo. Registren en su cuaderno sus conclusiones acerca de cómo obtener la razón de cambio.

© SANTILLANA

Razón de cambio y la inclinación de la función lineal

3. **Analicen la información y realicen lo que se solicita.**

Ramón es arquitecto y participa en la construcción de una nueva presa que tiene una altura de 208 metros y un ancho de coronación de 628 metros. La información que tiene es que el agua que suministrará dicha presa está dada por la siguiente expresión: $h = 85t + 15$.

En la que h representa el nivel de agua (en metros), según el cauce de un río, mientras que t es el tiempo en años.

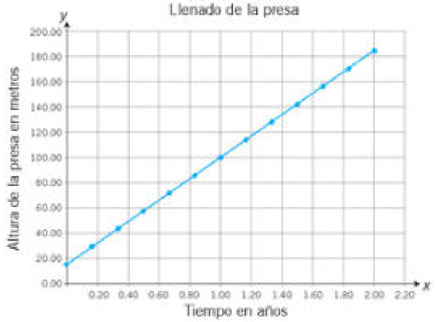
- ¿Qué tipo de función es la que se modela con dicha expresión? Justifiquen. ____________

____

a. Supongan que la presa se llena con el cauce de un río que corre de manera constante y que el agua no se utilizará hasta que esta se encuentre a 100% de su capacidad. A partir de esto completen la tabla que indica el nivel del agua para los dos primeros años.

Año	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{2}{6}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{6}$	$1\frac{5}{6}$	2
Nivel (m)												

b. Comparen los resultados que obtuvieron en la tabla con la siguiente gráfica.



- ¿La gráfica corresponde a la tabla de valores que obtuvieron? ¿Cómo lo sabes?

____

- En la gráfica, ¿de qué manera se registra el tiempo? ____________
- ¿Cuál es el nivel de agua cuando se considera $t = 0$? ____________
- ¿Qué interpretación le pueden dar a su última respuesta? ____________
- A partir de la gráfica, ¿cuál es la razón de cambio? ____________ ¿Qué hicieron para obtenerla? ____________

c. Si se quiere determinar la razón de cambio por bimestres, ¿cuál es dicha razón entre el primero y el tercero? ____________

- ¿Entre el quinto y el noveno? ____________
- ¿Y del sexto al decimosegundo? ____________
- ¿Cómo son entre sí los últimos resultados? ¿Cómo se justifica? ____________

____

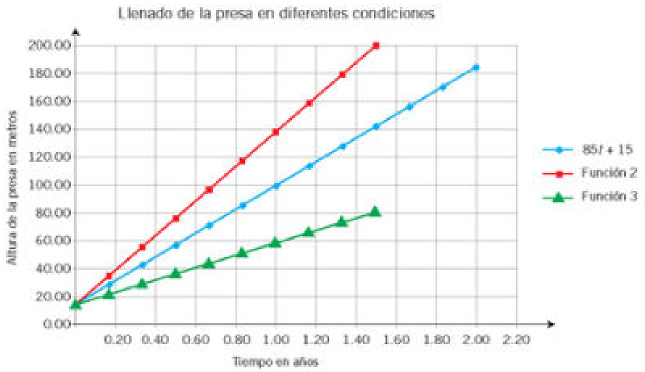
- ¿Cómo se relaciona la razón de cambio con la expresión algebraica, la gráfica y la tabla de valores?

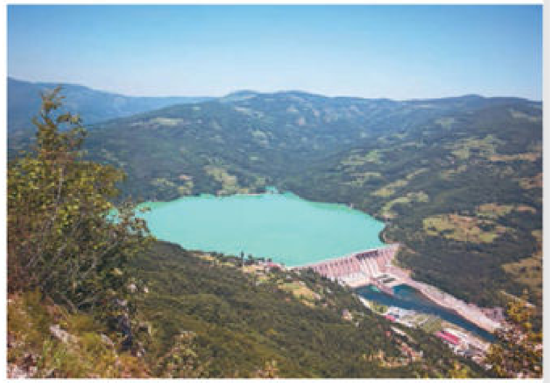
› Socialicen sus respuestas y argumentos con el resto del grupo. Con la ayuda del profesor, registren sus conclusiones.

4. **Retomen el problema de la presa y resuelvan en pareja.**

Al arquitecto Ramón le comentaron que la expresión $h = 85t + 15$ para el llenado de la presa es para condiciones ideales del clima, sin embargo, es necesario considerar las épocas de exceso de lluvia o de sequías. La siguiente gráfica muestra las funciones que modelan las distintas condiciones: las ideales, el tiempo de sequía y el exceso de lluvia.

a. Analicen la gráfica y respondan en su cuaderno.





Una presa se construye generalmente en el caudal de un río con el fin de almacenar agua para su aprovechamiento.

- ¿Qué significa que las tres funciones tengan por coordenada (0, 15)?
- ¿Cuál función modela el caso de excesos de lluvia?
- ¿Cuál el caso de sequía?
- ¿Cuál es la razón de cambio de la función 2 y de la función 3?

b. Retomen la razón de cambio de la función $85x + 15$.

- ¿Cómo es dicha función comparada con la función 2?
- ¿Cómo es en comparación con la función 3?
- Si la razón de cambio de la función 2 fuera mayor, ¿el tiempo en que el agua alcanza su mayor nivel, aumenta o disminuye? ¿Por qué?
- Si la razón de cambio de la función 3 fuera menor, ¿el tiempo en que el agua alcanza el mayor nivel, aumenta o disminuye?

c. Escriban una conclusión acerca de lo que sucede con la inclinación de una función lineal con respecto del eje de las abscisas a medida que la razón de cambio aumenta o disminuye.

› Compartan su conclusión con el grupo y, con ayuda del profesor, validen sus argumentos.

© SANTILLANA
© SANTILLANA

Razón de cambio en diferentes contextos

5. **Analicen la información, y realicen lo que se solicita.**

Rosa es ingeniera en comunicaciones y electrónica y actualmente trabaja en el área de ventas de una compañía que fabrica dispositivos de telecomunicaciones de radiofrecuencia y satelitales. A ella le pagan 6% de comisión por cada equipo que vende.

Sin embargo, hay otras tres empresas que están interesadas en que Rosa trabaje con ellos y le han realizado las siguientes ofertas:

- Opción 1, un sueldo base de $5 000.00 mensuales más una comisión de 3% por cada equipo que venda.
- Opción 2, un sueldo base de $4 000.00 mensuales más una comisión de 4% por cada equipo que venda.
- Opción 3, un sueldo base de $3 000.00 mensuales más una comisión de 5% por cada equipo que venda.

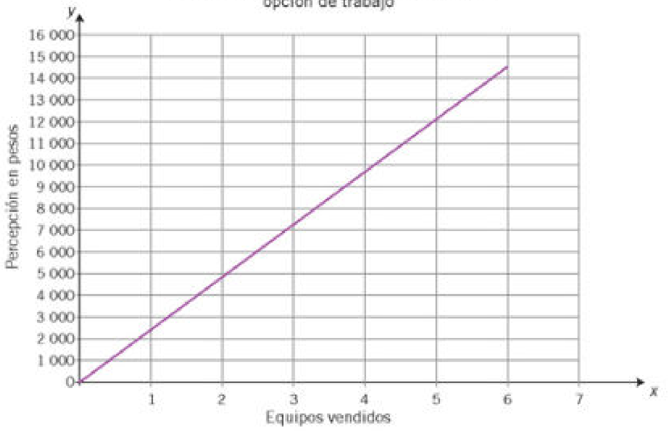
a. Los equipos tienen un costo medio de $40 000.00 y Rosa vende en promedio cinco equipos mensuales.

- Según lo anterior, ¿le conviene a Rosa aceptar alguna de las opciones o quedarse con la actual empresa? Argumenten. ______

______

b. La siguiente gráfica muestra lo que Rosa percibe en su trabajo actual. Tracen las gráficas que corresponden a las tres opciones que le ofrecen.

Proyección de lo que ganaría Rosa en cada opción de trabajo



- ¿Cuál es la razón de cambio de la opción 1? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio de la opción 2? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio de la opción 3? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio de su trabajo actual? ______

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Aparte del porcentaje que ofrece cada opción, ¿qué otro aspecto diferencia las tres opciones de su trabajo actual? ______

- Si la opción 2 modificara su oferta y le ofreciera un sueldo base de $8 000 y 2% de cada equipo vendido, ¿le convendría? ______
- Si la opción 3 modificara su oferta y le mantuviera un sueldo base de $3 000 pero aumentara a 6% la comisión por cada equipo vendido, ¿le convendría? ______
- ¿Qué le conviene más a Rosa: mayor sueldo base o mayor porcentaje por cada equipo que venda? ______
- ¿Qué sucede con la función lineal si aumenta o disminuye el porcentaje por la venta de cada equipo con respecto del eje de las abscisas? ______

› Socialicen sus argumentos y, en grupo, escriban una conclusión acerca de la relación entre la razón de cambio y una función lineal de la forma $y = mx + b$.

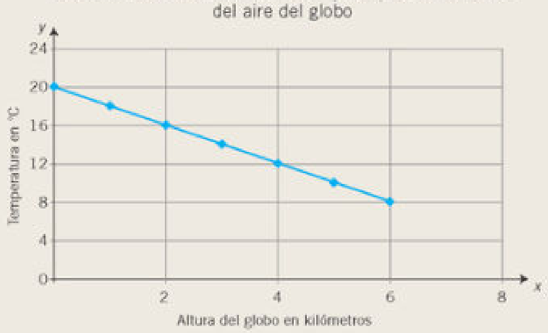
Reto — La temperatura y la altura de un globo

1. **Reunidos en pareja, realicen lo que se pide.**

Roberto está estudiando Física y tiene que realizar el siguiente experimento:

Se sabe que, si un globo se infla con aire caliente, sube de manera vertical: a medida que la altura del globo aumenta, el aire que contiene se expande y enfría. La función que modela este ascenso según la temperatura, está dado por la siguiente gráfica.

Relación de altura que recorre un globo y la temperatura del aire del globo



a. ¿Cuál es la temperatura del globo antes de iniciar su recorrido? ______

b. ¿Y cuando este se encuentra a 4 km? ______

c. ¿Cuál es la razón de cambio que se modela en la gráfica? ______

d. A partir de la razón de cambio, ¿cuál es la expresión algebraica que modela la función de la gráfica? ______

2. **Planteen un problema de razón de cambio asociado a una función lineal del tipo $y = ax$ o $y = ax + b$.**

› Discutan en grupo sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas en grupo.

Apoyo tecnológico

Ingresa al sitio web, analiza los videos que se muestran y resuelve lo que se solicita.

https://es.khanacademy.org/math/algebra-basics/core-algebra-graphing-lines-slope/core-algebra-slope/v/slope-of-a-line

Comparte con tus compañeros tu experiencia y discutan sus conclusiones, si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

27

Desviación media en un conjunto de datos

Eje: Manejo de la información
Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Las redes sociales en Internet

1. Organizados en pareja realicen lo que se pide.

a. La siguiente información corresponde a un estudio llamado "La juventud y las redes sociales en Internet". Analicen la información y contesten.

El objetivo de la encuesta es analizar los hábitos, usos y comportamientos de la juventud española en relación con las TIC, especialmente en todo lo que se refiere a las redes sociales por Internet, así como estudiar cómo viven, valoran y entienden esta nueva forma / vía de comunicación digital. Para ello se entrevistó a una muestra representativa nacional de mil jóvenes de 11 a 20 años de edad.

Fuente: www.fundacionpfizer.org/docs/pdf/Foro_Debate/INFORME_FINAL_Encuesta_Juventud_y_Redes_Sociales.pdf (3 de diciembre de 2012, a las 1:48 h)

- ¿Por qué piensan que es importante este tipo de estudios? ______
- ¿Cuál es la población del estudio? ______
- ¿Cuál es la muestra? Expliquen. ______

b. Siguiendo el modelo del estudio anterior, en la escuela de Néstor realizaron una encuesta: entrevistaron a mil jóvenes y los datos recabados se muestran en la siguiente tabla. Completen la tabla y respondan.

Grupo	Rango de edad	Hombres	Mujeres	Total
1	11 a 13 años	170	145	
2	14 a 16 años	159	212	
3	17 a 20 años	171	143	

- En promedio, ¿cuántas mujeres fueron encuestadas? ______
- En promedio, ¿cuántos hombres fueron encuestados? ______
- ¿Qué significado pueden asociar a los promedios anteriores? ______
- ¿Qué diferencias identifican en las listas de datos? Expliquen. ______
- De los grupos de hombres, ¿qué grupo está más alejado y cuál se acerca más a la media? Argumenten. ______

Glosario

promedio. Es el valor que se obtiene de sumar todos los resultados de una muestra y dividirlos entre el número de ellos.

© SANTILLANA

- Comparen el número de mujeres de los tres grupos. ¿Qué grupo está más cerca de la media aritmética? Expliquen. ______
- ¿Qué grupo de mujeres está más alejado del promedio? Argumenten. ______
- De los seis grupos, ¿cuál está más cerca y cuál más alejado de la media? Expliquen. ______
- ¿Qué datos son más **dispersos**, los de hombres o los de mujeres? Argumenten su respuesta. ______

c. Los grupos encuestados pueden representarse por un mismo dato: el promedio. Sin embargo, tienen diferente dispersión respecto de este.

- ¿Están de acuerdo con esta afirmación? Justifiquen. ______

d. Sustenten cuándo un conjunto de datos puede representarse a través de la media y tener diferente dispersión en relación con ella.

› Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos.

Glosario

dispersión. Mide qué tan lejos están los valores de un conjunto de datos respecto de un valor (normalmente la media aritmética) en una muestra representativa.

Dispersión y desviación media

2. Organizados en equipos realicen lo que se pide.

Un laboratorio oftálmico realizó una encuesta de satisfacción sobre los lentes de contacto blandos, elaborados con hidrogel de silicón, un material que permite una adecuada transmisibilidad de oxígeno y fluido lagrimal que mejora la calidad visual del usuario. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

a. Completen la tabla. Después, respondan en su cuaderno.

Rubro	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
1. Diseño del lente de contacto	26	21	5	1	1
2. Comodidad de uso	24	23	4	1	2
3. Durabilidad del lente	18	30	5	1	0
4. Adaptación al lente de contacto	23	19	8	3	1
5. Conocimiento de cuidados básicos	25	20	7	1	1
Promedio					

- ¿Cuál es el promedio de usuarios que califican como "Excelente" los rubros de la encuesta?
- Observen los promedios obtenidos, ¿qué interpretación pueden darle a los que corresponden a la escala "Excelente" y "Muy bueno"?
- ¿Qué interpretación se puede asignar a la escala "Bueno"?
- ¿Qué significado puede darse a la escala "Regular" y "Malo"?

© SANTILLANA

- Al comparar los promedios de los cinco rubros, ¿en cuál es más alto? Expliquen.
- Comparen con el promedio obtenido el número de usuarios que calificaron en cada rubro como "Excelente", ¿cuál es la dispersión entre ambos? Expliquen.

b. Para organizar los resultados de la comparación anterior completen la tabla.

Rubro	1	2	3	4	5
Excelente	26	24	18	23	25
Promedio	23.2				
Diferencia entre el promedio y el rubro	2.8				

- ¿En qué rubro es mayor la desviación o dispersión entre el dato registrado y el promedio obtenido? ¿En cuál es menor? ______
- ¿Qué significado, dentro del contexto de la encuesta, pueden dar a los dos resultados anteriores? ______

c. Elaboren en el cuaderno una tabla similar a la anterior para cada uno de los niveles considerados en la encuesta (muy bueno, bueno, regular y malo).

- ¿Cómo pueden obtener la dispersión del conjunto de datos en comparación con el promedio de cada nivel? ¿Cuál será la utilidad de dicho dato?

› Comparen sus respuestas con el grupo. Comenten el significado de "Desviación media" y su utilidad en un conjunto de datos como los presentados. Registren sus conclusiones al respecto.

3. En pareja, analicen la siguiente información y realicen lo que se indica.

Para determinar la **dispersión** o separación de la media de un conjunto de datos, se calcula el promedio de la diferencia de cada dato con la media del conjunto, es decir:

- se obtiene el promedio simple del conjunto de datos.
- se calcula el valor absoluto de la diferencia de cada dato en relación con el promedio, se suman dichos valores y se divide entre el total.

Por ejemplo, considerando la información anterior, para medir la dispersión de la escala "Muy bueno", se tiene:

$$D = \frac{|21 - 22.6| + |23 - 22.6| + |30 - 22.6| + |19 - 22.6| + |20 - 22.6|}{5} = 3.12$$

Por tanto, la dispersión del conjunto de datos es 3.12. A este resultado se le conoce como **desviación media**.

a. Apliquen el procedimiento anterior para determinar la desviación media de los niveles de calificación de los rubros de la encuesta:

Rubro	Excelente	Bueno	Regular	Malo
Desviación media				

© SANTILLANA

© SANTILLANA

- ¿Para qué nivel de calificación la desviación media es mayor? ¿Para cuál es menor?

› Socialicen sus respuestas y verifiquen que sean correctas.

b. En sesión grupal discutan la siguiente información teórica:

Las **medidas de dispersión** nos informan acerca de cuánto se alejan o acercan la distribución de datos en relación con un valor central. Estas nos permiten tener una visión del comportamiento de una serie de datos. Algunas medidas de dispersión son:

- **Desviación media**: es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto de la media (promedio) del conjunto de datos.
- **Rango o recorrido**: es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos de una distribución estadística. Nos indica la amplitud del conjunto de datos.

› Si hay dudas, coméntenlas en grupo con la finalidad de solucionarlas. Después escriban sus reflexiones.

c. Con base en lo anterior, obtengan el rango de los datos de la encuesta realizada por el laboratorio oftálmico; regístrenlo en la siguiente tabla:

Escala	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
Rango					

- Para determinar el rango, ¿cuántos datos se consideran?
- Para determinar la desviación media, ¿cuántos datos consideraron?
- Comparen los rangos y las desviaciones medias, ¿qué diferencias y semejanzas identifican? Expliquen.

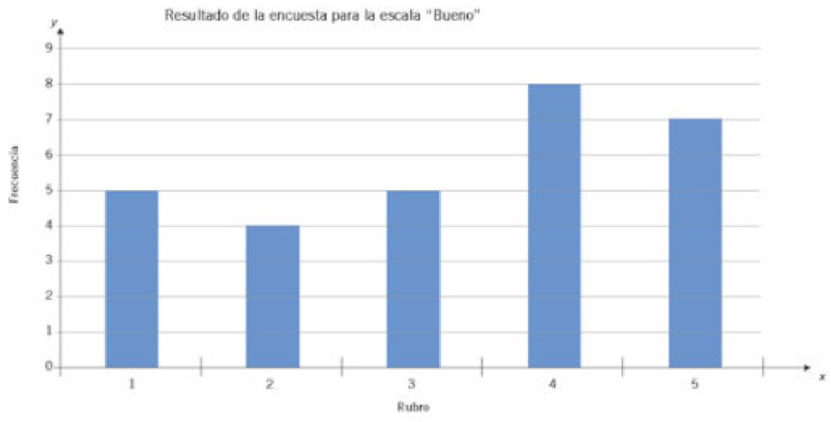
› Socialicen sus respuestas en grupo; busquen argumentos para sustentar qué características tienen el rango y la desviación media.

Análisis de registros gráficos

4. En pareja, retomen la encuesta del laboratorio oftálmico y realicen lo que se pide.

En la siguiente gráfica se representaron los resultados de la encuesta de satisfacción del laboratorio oftálmico con respecto de la escala de satisfacción para "Bueno".

Como se sabe, el promedio de las personas que contestaron con esta escala de satisfacción (Bueno) es de 5.8.



a. En la gráfica de la página anterior, traza una línea, paralela al eje de las x, que represente el promedio.

- ¿Qué rubros de la encuesta están debajo del promedio? ___
- ¿Cuáles están arriba del promedio? ___
- Con los datos de la gráfica, ¿se puede determinar la desviación media? Expliquen. ___

b. Usando la información de la gráfica, determinen la desviación media y comparen sus respuestas con lo solicitado en la actividad 3.

› Comparen sus resultados con las de otros compañeros y registren en su cuaderno una conclusión acerca de la utilidad de las gráficas para determinar la desviación media en un conjunto de datos.

Música favorita

5. **Lee la información y resuelve en tu cuaderno.**

En las siguientes listas se registraron los resultados de una encuesta realizada a estudiantes de secundaria para determinar el tipo de música de su preferencia.

Género	*Rock*	Alternativa	*Country*	Jazz	Hip hop	Rap	Pop	Clásica	Otro
Hombres	2	2	1	0	3	4	0	1	1
Mujeres	1	2	3	1	2	1	4	1	1
Promedio									

a. Calcula el promedio (hombres y mujeres) de cada género musical y determina la desviación media de cada uno.

b. Obtén el rango de cada caso.
- ¿Cuál lista de datos tiene menor rango? Explica.
- Esa misma lista, ¿también tiene la menor desviación media? Argumenta.

› Socializa con el grupo tus argumentos y respuestas. Después registra los acuerdos que de ello resulten.

c. Ahora, calcula la desviación media y el rango de los siguientes conjuntos de datos. Regístralos en la tabla.

Lista	Datos									Desviación media	Rango
A	3	2	2	1	2	2	2	3	1		
B	3	2	2	2	2	2	2	2	1		
C	3	3	3	2	1	1	1	2	2		

- ¿Cuál es la lista de datos con menor rango? Explica. ___
- ¿Cuál es la de mayor rango? Justifica. ___

© SANTILLANA

© SANTILLANA

- ¿Cuál es la lista de datos que tiene mayor desviación media? Argumenta. ___
- ¿Cuál con menor? Explica. ___

d. Ahora, en pareja, elaboren la gráfica de barras correspondiente al conjunto de datos B, en la que se indique el promedio y se identifique la desviación media. Respondan en su cuaderno.

- ¿Qué significado asignan a los datos que ubicaron en el eje horizontal? Expliquen.
- ¿Qué significa la frecuencia en el registro gráfico?
- ¿Qué significa en cada gráfica la línea que parte verticalmente las barras del valor 2? Justifiquen.
- ¿Cómo se relaciona en términos generales la medida de la desviación media (DM) con la forma de la gráfica de frecuencias? Argumenten.
- Sustenten la veracidad de la siguiente oración:

A menor desviación media, los datos se acercan más al promedio o coinciden con él.

› En sesión grupal, comparen sus respuestas y argumentos. Valídenlos con la ayuda del profesor y registren sus conclusiones respecto del tema trabajado en la lección.

Reto Desviación media y rango

1. **Reunidos en pareja, resuelvan los siguientes problemas.**

a. Determinen la desviación media y el rango del conjunto de datos. Después obtengan la gráfica que los representa.

A	5	5	4	1	4	2	2	3	1
B	4	2	2	6	2	4	2	4	1
C	5	3	3	5	1	5	1	2	2
D	4	5	4	5	2	2	1	1	3

b. Planteen algunas preguntas que puedan responderse con la información dada e intercámbienlas en el grupo.

› Discutan sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas en grupo.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás ampliar la información sobre desviación media. Al ingresar, analiza los videos que se muestran.

https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-los-datos-y-la-estadistica-3#eb-desviacion-media-absoluta-mad

Discute con tus compañeros la información que se encuentra en la página y analicen los ejemplos propuestos.

Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 23 de enero de 2017)

Para saber más

La producción de petróleo en México

1. En pareja, lean la información y realicen lo que se pide.

Yacimiento Cantarell, Campeche, México. Tiene una extensión aproximada de 15 500 km^2.

En el año de 1972, un pescador, Rudesindo Cantarell, descubrió una mancha de aceite que brotaba de las profundidades del mar, en la zona conocida como la Sonda de Campeche. Poco tiempo después, quedó al descubierto que México había localizado un yacimiento petrolero gigante. El apellido del descubridor le dio nombre al lugar: Cantarell.

Los primeros barriles de petróleo de Cantarell se produjeron en junio de 1979, con un promedio diario de 4 290 barriles. Para diciembre, la producción alcanzaba los 239 000 barriles diarios. El efecto Cantarell se hizo sentir rápidamente. De producir 748 000 barriles diarios durante la década de 1970, el promedio de producción diaria del país creció hasta alcanzar 2.5 millones de barriles en la década de 1980, 2.8 millones en los noventa y 3.2 millones en el periodo 2000-2007.

Fuente: www.pemex.com/index.cfm?action=content&sectionid=137&catid=12222

a. Con base en la información, respondan en su cuaderno.

- ¿Cuál fue la media de producción de 1970 a 2007? Argumenten.
- ¿Cuál es la desviación media de estos datos?
- ¿Qué dato muestra una desviación mayor respecto del promedio?
- ¿Cuál es la media de producción de 1980 a 2007? ¿Cuál es la desviación media de estos datos?
- ¿Por qué varía tanto la media y la desviación media obtenidas?

b. Analicen la gráfica y respondan.

- ¿Qué información muestra la gráfica? ____________________
- ¿Cuál fue la media en la producción de petróleo en los años que muestra la gráfica? ____________________

Gráfica 1

- Tracen una línea paralela al eje de las *x*, que represente el promedio.
- Con los datos de la gráfica, ¿se puede identificar la desviación media? Expliquen. ____________________
- ¿Cuál es el rango de los datos? ____________________
- ¿Qué significado pueden asociar a la medida del rango obtenido? ____________________

© SANTILLANA

© SANTILLANA

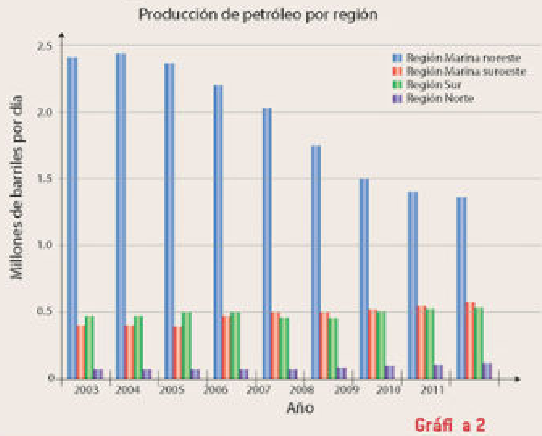
- ¿En qué año la desviación respecto del promedio es mayor? ¿En cuál es menor? ____________________
- ¿Cuál es la desviación media de los datos de la gráfica? ____________________
- Al comparar el promedio obtenido en la gráfica y el dato dado por Pémex (2.8 millones en la década de 1980), ¿cuál es la desviación entre ambos datos?

> Comparte tus respuestas con el grupo y valídenlas con el profesor. Comenten acerca de la importancia para la economía mexicana del hallazgo del yacimiento Cantarell. Registren en su cuaderno sus acuerdos.

2. En grupo, lean la información y resuelvan.

a. En la gráfica se muestra la producción de petróleo en cuatro regiones del país, que reflejan la producción nacional.

- ¿Qué región del país aporta mayor cantidad de petróleo? ____________________
- ¿Qué región del país genera menor cantidad de petróleo? ____________________



Gráfi a 2

b. Con base en los datos de la gráfica, obtengan las medidas estadísticas que se solicitan; después contesten lo que se pide.

Región	Marina noreste	Marina suroeste	Sur	Norte
Promedio				
Desviación media (DM)				
Rango				

Las medidas de dispersión permiten juzgar la confiabilidad de la medida de tendencia central.

- A partir de la afir ación anterior, ¿cuál es el comportamiento de las medidas de dispersión identificadas? Expliquen. ____________________
- ¿Cómo es la dispersión de los datos obtenidos en las gráficas 1 y 2? ____________________
- ¿Es posible comparar la dispersión de las gráficas 1 y 2? ____________________

c. Planteen preguntas en las cuales involucren a las medidas de dispersión estudiadas; después expónganlas en clase y valídenlas.

> Socialicen sus argumentos y registren sus conclusiones.

Evaluación tipo PISA

› Elige la opción con la respuesta correcta.

En un torneo de basquetbol, cada equipo jugará dos veces contra otro: uno como local y el otro como visitante.

1. **Con el número de partidos que se jugarán en el torneo, si hay x equipos, ¿se puede modelar una sucesión cuya regla represente una ecuación cuadrática?**

   A) No, la situación planteada se modela mediante permutaciones y combinaciones.
   B) Sí, pero no con una ecuación cuadrática, sino con una ecuación lineal.
   C) Sí, la situación planteada modela una sucesión cuadrática.
   D) Ninguna de las opciones de respuesta dadas es correcta.

2. **En la tabla se relaciona el número de juegos según los equipos participantes. ¿Qué opción muestra los datos que completan la tabla, incluido el término n?**

Núm. de equipos	1	2	3	4	5	6	7	...	20	...	225	...	n
Núm. de partidos	0	2	6	12	20								

   A) 30, 42, 380, 50 400 y $n(n+1)$
   B) 56, 72, 380, 50 400 y $n(n-1)$
   C) 30, 42, 90, 39 800 y $n(n-1)$
   D) 30, 42, 380, 50 400 y $n(n-1)$

3. **En un conjunto de datos, las medidas de dispersión nos permiten saber:**

   A) cuánto se alejan o acercan los valores de la media.
   B) las tendencias de una gráfica de frecuencias.
   C) cuando se grafican, qué tan cercano está el promedio de la media ponderada.
   D) ninguna de las anteriores.

4. **La desviación media se puede entender como la ____ de los valores absolutos de las desviaciones respecto de la media o promedio. ¿Qué opción completa la oración?**

   A) media aritmética **B)** mediana **C)** media ponderada **D)** moda

› Realiza lo que se indica en cada caso.

5. **Determina la desviación media y el rango del conjunto de datos y explica tu procedimiento.**

A	5	6	4	1	4	6	2	3	1
B	4	4	2	6	2	4	2	6	1
C	4	3	3	5	6	5	1	3	2
D	4	5	6	5	2	2	6	1	2

   a. Desviación media: ____________
   b. Rango: ____________

© SANTILLANA

6. **Joshua y Bibi se subieron a la rueda de la fortuna y al bajar decidieron calcular su altura. Se pararon a 15 metros del juego y, al mirar desde este punto al punto más alto de la rueda, su ángulo de elevación era de 42°, como se muestra en la imagen.**

   a. Con los datos que se dan, obtén la altura de la rueda de la fortuna: ____________
   b. Explica el procedimiento empleado para determinar la altura de la rueda de la fortuna y de la hipotenusa del triángulo formado a partir de los siguientes conocimientos:
   - Razones trigonométricas ____________
   - Teorema de Pitágoras ____________

7. **Determina si las siguientes aseveraciones son verdaderas (v) o falsas (f).**

Oración	Veracidad
La regla de una sucesión cuadrática es una expresión algebraica en la que la literal, que se encuentra en alguno de los términos de dicha expresión algebraica, se eleva al cuadrado y tiene la forma $an^2 + bn + c$, donde n hace referencia a la posición.	
El rango o recorrido de un conjunto de datos es el producto entre el mayor y el menor de los datos de una distribución estadística.	
La trigonometría estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, así como las propiedades y las aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos.	
El seno de un ángulo es igual al coseno del complemento del ángulo de la función seno, y la tangente de un ángulo es recíproco o inverso multiplicativo a la tangente del complemento de su ángulo.	

Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Utiliza los términos *siempre*, *a veces* o *poco*, y completa la tabla.

Indicadores			
Uso, en casos sencillos, expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.		Resuelvo problemas que implican el uso de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.	
Calculo y explico el significado del rango y la desviación media.		Comunico y sustento mis intervenciones orales y escritas.	

En clase externa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.

© SANTILLANA

BLOQUE 5

Invitación a la lectura

Las secciones cónicas y su utilidad

Las secciones cónicas fueron estudiadas desde la antigua Grecia. El matemático griego Menecmo, quien vivió alrededor del año 350 a. de C., descubrió las secciones cónicas. El matemático griego Apolonio de Perga (262-190 a. de C.) fue el primero en analizar con detalle las hipérbolas y parábolas. Además, demostró propiedades de las curvas cónicas que hoy se utilizan para definirlas. Hipatia, en el siglo V d. de C., estudió las propiedades geométricas de la parábola y actualizó el trabajo de Apolonio.

A partir del Renacimiento, destacados personajes renovaron el estudio de las cónicas. En el siglo XVI, René Descartes desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones, mientras que Johannes Kepler descubrió que las órbitas de los planetas son elipses que tienen al Sol como uno de sus focos. Más tarde, Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio siempre es una curva cónica.

Desde el principio, el estudio de las secciones cónicas reveló fenómenos interesantes. Uno de ellos son las propiedades de reflexión descritas por Apolonio y su aplicación en espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos. Apolonio demostró que, si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico, de tal forma que los rayos incidentes sean paralelos al eje del espejo, la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco.

Este fenómeno tiene diferentes aplicaciones. Por ejemplo, si en el foco de un espejo parabólico se pone un papel y el eje del espejo se apunta hacia el Sol, el papel se enciende. Una leyenda narra que, durante la defensa de Siracusa, Arquímedes (287-212 a. de C.) logró incendiar naves romanas usando, precisamente, las propiedades de los espejos parabólicos. En la actualidad dicha propiedad se emplea en los radares, las antenas de televisión y espejos solares. La propiedad análoga, que nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje también es útil: sirve para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera o para estufas.

› **Subraya la respuesta correcta y contesta.**

1. ¿Quién descubrió las secciones cónicas?

   A) Apolonio **B)** Hipatia **C)** Menecmo **D)** Kepler

2. ¿Qué tipo de curva estudió Hipatia?

   A) Ninguna **B)** Hipérbola **C)** Elipse **D)** Parábola

3. ¿Con qué tipo de curva cónica se asocia el movimiento de los planetas? ______________________

4. En la actualidad, ¿para qué sirven las secciones cónicas? ______________________

© SANTILLANA

El tradicional paseo en globo aerostático permite apreciar las formas cónicas de Capadocia, Turquía. En 1985, la Unesco determinó que la zona de Capadocia, con una extensión de 9.576 ha, es patrimonio de la humanidad.

Presentación del bloque

© SANTILLANA

Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

28 Distintos tipos de ecuaciones

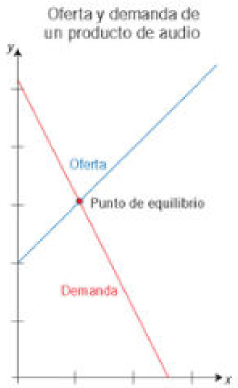
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

Oferta y demanda

1. En pareja, analicen la siguiente información y resuelvan.

Jorge y Raúl iniciaron un negocio que consiste en comercializar sistemas de audio y video. Ellos saben que debe existir un equilibrio entre la oferta y la demanda, el cual tiene relación con los precios que ofrecen los proveedores y lo que una persona está dispuesta a pagar.



a. Jorge trazó una gráfica donde se muestra la oferta y la demanda de un producto de audio y las modeló con las siguientes expresiones algebraicas:

(1) $y = 2000 - 4x$ (2) $y = 9x + 50$

- De acuerdo con los datos de la gráfica, ¿cuál de las dos expresiones representa la demanda del producto? ______
- ¿Cuál de las dos expresiones representa la oferta? ______
- ¿Qué representa la literal x? ______
- ¿Qué representa la literal y? ______
- ¿Qué representa el punto de equilibrio en la gráfica? ______
- ¿Cuántos y a qué precio deben vender los productos de audio? ______

b. Describan en su cuaderno el procedimiento que utilizaron para determinar el precio del producto y la cantidad de productos a vender.

c. Para vender un artículo de video, Jorge utiliza las expresiones algebraicas:

(1) $x + 2y = 1400$ (2) $4y - 3x = x$

- ¿Cuál de las dos expresiones representa la demanda del producto y cuál la oferta? ______
- ¿Qué representa la literal x? ______
- ¿Qué representa la literal y? ______
- ¿Cuántos productos colocará en el mercado y a qué precio tendrían que venderse? ______

d. Describan en su cuaderno el procedimiento que utilizaron para responder lo anterior.

- ¿Qué tipo de ecuaciones representan cada situación? ______

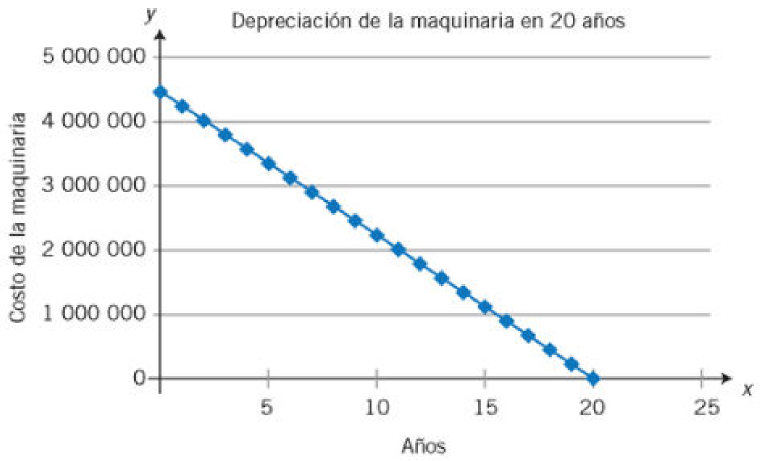
› Comparen sus resultados y estrategias con los de otros compañeros y valídenlos en grupo.

© SANTILLANA

Resolución de una ecuación lineal

2. Analiza la información, realiza y responde lo que se solicita; justifica cada respuesta.

Los directivos de una empresa de la construcción adquirirán maquinaria que tiene un costo de \$4 500 000.00, cuya vida útil es de 20 años. Rodolfo, que es contador, informó a los directivos la **depreciación** anual que sufrirá la maquinaria a lo largo de los 20 años, en la siguiente gráfica.



- ¿Qué representa la coordenada (0, 4 500 000)? ______
- ¿Qué significa el par ordenado (20, 0)? ______
- ¿Qué cantidad se deprecia la maquinaria por año? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la situación? ______
- ¿Cuál de las siguientes formas tiene la expresión algebraica? Expliquen. ______
  - $y = mx$
  - $y = mx^2 + b$
  - $y = x^2$
  - $y = mx + b$

› Socializa tus argumentos y con ayuda del profesor valídalos con el resto del grupo.

Glosario

depreciación. Disminución del valor de un bien por su uso.

Problemas con ecuaciones lineales y cuadráticas

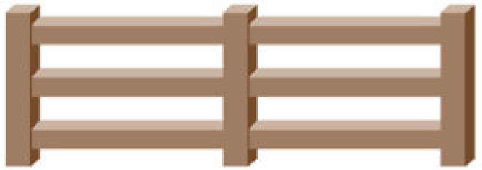
3. Reunidos en equipo, analicen y resuelvan cada problema.

a. José invirtió su dinero en dos bancos diferentes a un plazo de seis meses. El banco A le ofreció 5% de interés, mientras que el banco B le dio 4.5%. Al concluir los seis meses, la ganancia total por intereses en ambos bancos es de \$18 860.00. Para el siguiente periodo retiró los intereses y dejó en cada banco la cantidad inicial, pero ahora el banco A le ofrece una tasa de interés de 5.5%, y el banco B, de 3.5%. Al concluir este periodo, José tendrá una ganancia por los intereses de \$16 450.00.

- ¿Qué expresión algebraica modela la primera inversión? ______
- ¿Qué expresión algebraica modela la segunda inversión? ______
- ¿Las dos expresiones anteriores representan un sistema de ecuaciones? Argumenten su respuesta. ______
- ¿Cuál procedimiento les resulta más conveniente para resolver dichas expresiones? ______
- ¿Cuál fue la inversión inicial en cada banco? ______

© SANTILLANA

b. Joaquín trabaja en un centro de equitación y le encargaron cotizar las vallas para cercar el perímetro del campo de entrenamiento. La valla está compuesta por postes de madera colocados verticalmente y vigas puestas de manera horizontal, como se muestra en la imagen.



Las vigas y los postes tienen forma de prisma cuadrangular; la base de los postes mide 30 cm por lado y estos miden 1.8 m de altura, mientras que las vigas, miden de base 0.3 m de lado y 2.2 m de largo.

El campo tiene forma rectangular, su perímetro es de 360 m y se sabe que el largo es tres veces la medida del ancho.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar la medida del largo del campo de entrenamiento en función de la medida del ancho?
- ¿Cuál es la medida del largo del campo?
- ¿Cuál es la medida del ancho?
- ¿Cuál es el área total del campo de entrenamiento?
- ¿Qué expresión algebraica permite modelar los postes que se necesitan para cercar el terreno?
- ¿Qué representa cada término?
- ¿Cuántos postes se requieren para cercar el terreno? Justifiquen su respuesta.
- ¿Qué expresión permite modelar las vigas que se necesitan?
- ¿Cuántas vigas hacen falta para cubrir una fila en todo el terreno?
- ¿Cuántas vigas se requieren en total?

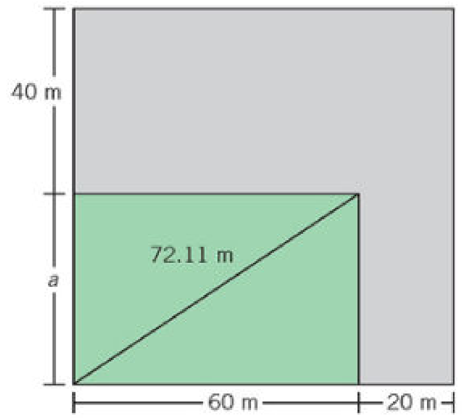
c. En el centro de equitación tienen un espacio donde se guardan los caballos. Este lugar ocupa una superficie de 5 400 m^2 y se sabe que el largo mide 30 m más que el ancho.

- ¿Qué expresión algebraica permite modelar el área de dicho espacio?
- ¿La expresión anterior es una ecuación lineal o cuadrática?
- Expliquen qué procedimiento siguieron para resolver la ecuación.
- ¿Es el único que puede utilizarse para determinar la medida de los lados? Argumenten.
- ¿Cuántas soluciones negativas tiene la ecuación? ¿Qué representa en este caso?
- ¿Cuál es el perímetro del área donde guardan los caballos?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar el perímetro?
- Dicha expresión, ¿es una ecuación lineal o cuadrática?

› Comparen en grupo sus respuestas y, con ayuda del profesor, valídenlas.

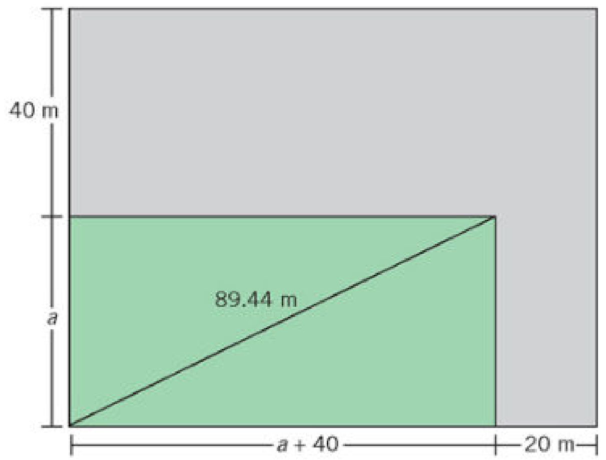
© SANTILLANA

d. La figura que se muestra es una reproducción a escala del área de exhibición del centro de equitación donde trabaja Joaquín. El área en color verde es el campo de juego, mientras que la gris son las gradas.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar el área de la gradas?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar el área del campo de juego? Determínenla a partir de *a* y de la diagonal del rectángulo.
- Analicen las dos expresiones anteriores. ¿Representan ecuaciones lineales o cuadráticas? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuál es el área del campo de juego y del área de gradas?

e. El centro de equitación tiene otra área de exhibición, la cual se muestra en la siguiente figura.



- ¿Las medidas del campo de juego son mayores o menores que las del área de exhibición anterior?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar el área del campo de juego?
- ¿Qué tipo de ecuación representa? Justifiquen.
- ¿Cuál es el área del campo de juego y del área de gradas?

› Socialicen sus argumentos y, con ayuda del profesor, valídenlos en grupo.

© SANTILLANA

Plantear problemas a partir de expresiones algebraicas

4. **Resuelvan en equipo las siguientes ecuaciones.**

a. $x + 85 = 209$

$x =$ ______

b. $4x^2 + 16x = 600$

$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

c. $86x + y = 500$
$5x - 7y - 800 = 0$

$x =$ ______ $y =$ ______

d. $-86x + 5 = -75$

$x =$ ______

e. $x^2 = -4500$

$x =$ ______

f. $-50.5x - 1.6y = 190$
$-96.8x + 24.2 = y$

$x =$ ______ $y =$ ______

g. $25x + 80 = 105x - 200$

$x =$ ______

h. $9x^2 = 96x$

$x =$ ______

i. $y = 168 + x$
$x = 200 - y$

$x =$ ______ $y =$ ______

j. $1096x - 8650 = 512x$

$x =$ ______

k. $9x^2 - 54x = 81$

$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

l. $x = 96.8$
$x = 0.5x + 4y$

$x =$ ______ $y =$ ______

› Comparen sus resultados con otro equipo para comprobar la veracidad de sus respuestas. Si hay dificultades, soliciten ayuda del profesor para solucionarlas.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

5. **Analicen las ecuaciones de la actividad anterior y realicen lo que se pide.**

a. Identifiquen cuáles son ecuaciones lineales, cuadráticas o pertenecen a un sistema de ecuaciones. Regístrenlas en la siguiente tabla.

Tipo de ecuación	Lineal	Cuadrática	Sistema de ecuaciones
Inciso			

b. Elijan una ecuación lineal, una ecuación cuadrática y un sistema de ecuaciones, y planteen un problema para cada caso.

- Sistema de ecuaciones: ______
- Ecuación lineal: ______
- Ecuación cuadrática: ______

c. Intercambien y discutan sus problemas con otros equipos para analizar su pertinencia.

d. Verifiquen que los problemas planteados por el otro equipo puedan resolverse con la ecuación correspondiente.

› Socialicen sus argumentos y, con ayuda del profesor, valídenlos en grupo.

Reto Modelos geométricos

1. **Reunidos en pareja, realicen en su cuaderno lo que se pide.**

a. Analicen la figura y determinen:

- La expresión algebraica para obtener el área en color rojo.
- La expresión algebraica para obtener el área en color gris.
- La expresión algebraica para obtener el área de toda la figura.
- A partir de las expresiones anteriores, ¿cuáles son las medidas de los lados del rectángulo rojo?

b. Planteen un problema que se pueda modelar con la figura propuesta.

› Discutan en grupo sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

Ingresa al sitio: http://www.extremate.es/ESO/Defin tivo%20Funciones/pruebas/Funciones Afi es y Cuadraticas/index.html e identifica cuáles son ecuaciones lineales o cuadráticas, relaciona cada función con su gráfica. Elige una de cada tipo y escribe un problema para las ecuaciones seleccionadas.

Comparte con tus compañeros tu experiencia con el interactivo y discute tus conclusiones. Si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

29

Secciones cónicas

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

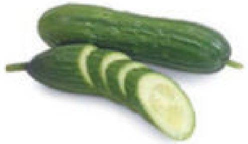
Contenido: Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Modelaje con frutos

1. **Organizados en equipos, lean la situación, observen las imágenes y respondan.**

Elemento base: kiwi

Elemento base: Pepino



Alfonsina está preparando un manual sobre cómo elaborar figuras con frutos.

a. Observen la forma de los frutos y respondan.

- Alfonsina dice que los frutos que usó se asocian con un cuerpo geométrico, ¿cuál puede ser: esfera, cono o cilindro? ______
- Completen la descripción de Alfonsina.

La base de los árboles son frutos de forma ______ ______

- Comenten qué características tiene el cuerpo asociado a los frutos y descríbanlas. ______ ______

b. Analicen las imágenes de cada modelo de árbol y respondan.

- ¿En qué se diferencia la forma de las rebanadas de pepino y las de kiwi empleadas para construir los árboles. ______ ______
- Completen la descripción de Alfonsina.

El árbol de kiwi tiene rebanadas de forma ______
El árbol de pepino tiene rebanadas de forma ______

- Piensen cómo cortó Alfonsina el kiwi y el pepino para obtener las rebanadas de cada árbol. Hagan un esquema para ejemplificarlo en su cuaderno.

2. **Organizados en pareja, consigan objetos con forma cilíndrica (por ejemplo, una lata, una vela u otro vegetal); supongan que les hacen diferentes cortes y hagan lo siguiente.**

a. Describan el cuerpo geométrico que se obtendrá si a un cilindro se le hace un corte paralelo a la base. ______

© SANTILLANA

© SANTILLANA

b. La imagen de la derecha representa un fruto que será rebanado con cortes **oblicuos**. Analícenla considerando que el fruto es un cuerpo asociado con un cilindro.

- ¿Qué forma tendrán las bases del cilindro antes y luego de hacer el corte? Expliquen. ______ ______

c. Concluyan la descripción para el manual de Alfonsina.

Para el árbol de kiwi se hacen cortes ______
Para el árbol de pepino se hacen cortes ______

› Comenten con otra pareja las respuestas a las actividades anteriores y registren en el cuaderno las diferencias.

Glosario

oblicuo. Línea o plano que corta a otra u otro formando un ángulo que no es recto.

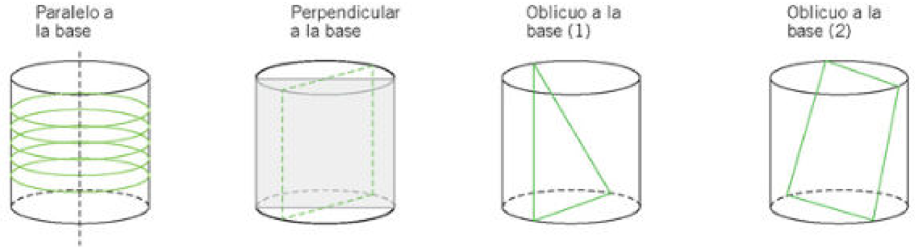
Cortes a cuerpos cilíndricos

3. **Organizados en pareja, realicen lo que se solicita.**

a. Seleccionen cuerpos cilíndricos (elabórenlos con plastilina o consigan vegetales o frutos) y hagan esta actividad en el laboratorio de Ciencias, en el aula o en casa.

- Realicen cuatro cortes oblicuos al cuerpo cilíndrico, consecutivos e iguales a los mostrados en la imagen superior de esta página. Expliquen cómo son las bases del cilindro luego de hacerle cada corte. ______ ______

b. Elijan otros cuerpos cilíndricos y háganles estos cortes (uno a la vez).



c. Describan los cuerpos obtenidos luego de hacer el corte.

Características	Paralelo a la base	Perpendicular a la base	Oblicuo a la base (1)	Oblicuo a la base (2)
De las bases				
De las caras generadas				

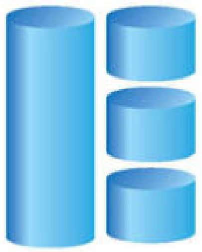
› Comenten en grupo sus respuestas y registren sus acuerdos en el cuaderno. Después, lean la información de la siguiente página y compárenla con sus conclusiones.

Al cortar un cilindro recto con un plano, se generan diferentes formas dependiendo del corte: si el plano hace un corte paralelo a la base, se generan círculos; si es perpendicular a la base, rectángulos, y si es oblicuo, elipses.

El cilindro cortado tiene caras con forma de:

elipse, si se le hace un corte oblicuo.

círculo, si se le hacen cortes paralelos a la base.



rectángulo si se le hace un corte perpendicular a su base.

d. Retomen la situación de las páginas 234 y 235. Revisen lo que contestaron en la descripción de cada árbol y, de ser necesario, corrijan sus respuestas. Expliquen con lenguaje geométrico qué forma tienen las secciones y el corte que debe hacerse para obtenerlas.

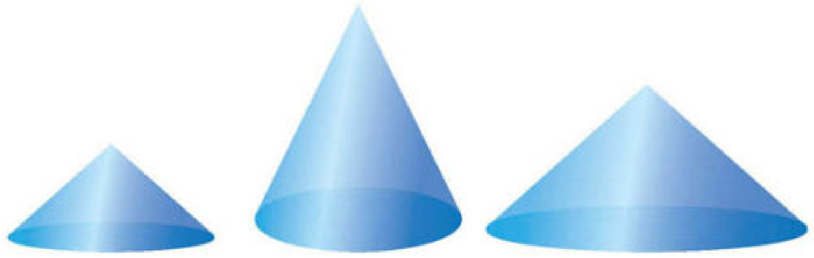
› Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en grupo. Después, den sus conclusiones.

Cortes al cono

4. Hagan esta actividad en equipos.

a. Elaboren diferentes conos con plastilina. Estimen qué forma tendrán sus bases si les hacen cortes verticales y horizontales; luego, comprueben sus estimaciones haciendo los cortes. Registren sus conclusiones en el cuaderno.

b. Lean la situación y respondan.
Jacinto, un alumno de secundaria, modeló con plastilina conos como los siguientes.



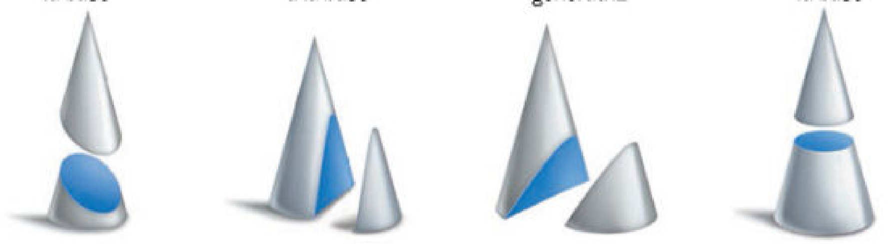
- Si se realiza un corte recto y paralelo a la base de cada cono, ¿qué formas se obtienen?
  ____
  ¿Cómo serán entre sí dichas formas? ______________________________
- Si el corte no es recto, sino oblicuo a la base, pero es igual en cada cono, ¿cómo son las formas que se generan? Descríbanlas. ______________________________

© SANTILLANA

- Al cortar un cono cualquiera de manera recta, ¿se obtiene siempre la misma forma?
  ____
- ¿Sucede lo mismo con un corte perpendicular al eje? ¿Y con cualquier tipo de corte? Expliquen. ______________________________

c. Observen los cuerpos y sus cortes. Escriban qué forma tiene la cara del cono destacada con azul y cuáles son sus características.

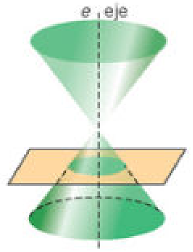
Oblicuo a la base	Perpendicular a la base	Paralelo a la generatriz	Paralelo a la base



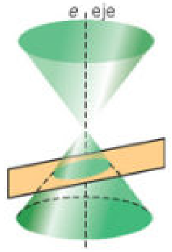
- Confronten sus observaciones y experiencias con la información teórica.

Cuando un plano corta a un cono, se obtienen diferentes secciones, conocidas como **secciones cónicas.**

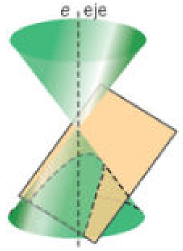
Si el plano corta al cono de forma perpendicular a su eje, la sección es un **círculo**.



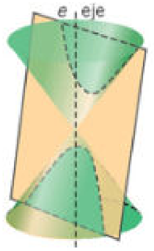
Si el plano es oblicuo al eje e interseca a las generatrices de un mismo lado del vértice, la sección se llama **elipse**.



Si el corte es oblicuo al eje, y paralelo a una de las generatrices del cono, la sección es una **parábola**.



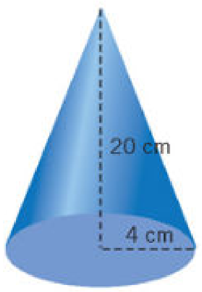
Si el plano interseca a todas las generatrices, pero no en un mismo lado del vértice, la sección es una **hipérbola**.



- Si tienen dudas, coméntenlas en grupo para solucionarlas.
- Después, registren sus acuerdos y conclusiones sobre lo realizado.

© SANTILLANA

Radios de los cortes al cono paralelos a su base



5. **Organizados en pareja, realicen lo que se solicita.**

a. Elaboren un cono con plastilina (u otro material de fácil acceso) que mida 20 cm de altura y 4 cm de radio en la base.

- Discutan si puede establecerse alguna relación entre la medida del radio del cono y su altura. Anoten sus argumentos. ______

- Al cortar un cono de forma paralela a la base, este pierde altura; ¿cómo afecta esto a la medida del radio del cono obtenido? ______

b. Hagan cortes paralelos a la base del cono. Cada corte será de 1 cm de altura. Luego, realicen lo que se indica.

- Comparen los círculos que resultan en cada corte y registren sus observaciones. ______

- Midan el radio de los círculos obtenidos y completen la tabla.

h (altura del cono en cm)	*r* (radio de la base en cm)	*h* (altura del cono en cm)	*r* (radio de la base en cm)
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

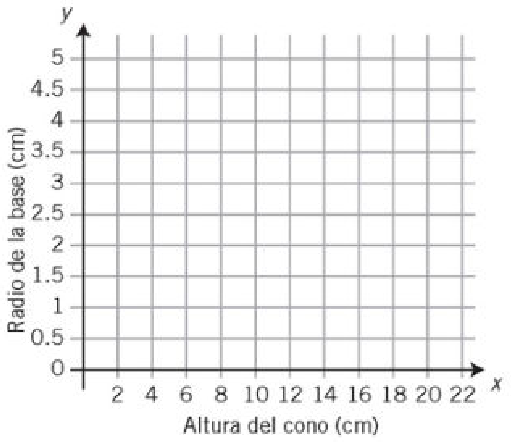
- ¿Cuánto mide el radio del círculo superior del cono cuando ha perdido la mitad de su altura? ______ ¿Y cuando ha perdido $\frac{3}{4}$? ______
- ¿Cuál sería la medida del radio del círculo, si su altura fuera de 22 cm? Expliquen. ______

- Expliquen cuál es la relación entre la pérdida de altura del cono al hacerle a este cortes paralelos a su base, y la medida del radio del círculo formado con el corte. ______

© SANTILLANA

6. **Haz esta actividad de forma individual.**

a. Traza la gráfica que representa la relación entre las alturas del cono obtenidas al hacer cortes paralelos a su base, y el radio de los círculos que se van formando.

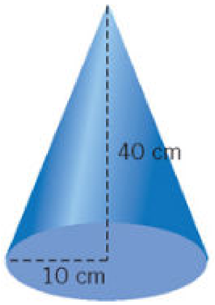


- Explica si la medida de la altura y el radio del cono tienen una relación de proporcionalidad y por qué. ______

› Socializa tus argumentos con tus compañeros. Acuerden si la relación explorada les sirve para determinar el radio de los círculos que se obtienen al hacer al cono cortes paralelos a su base.

Razón de semejanza para obtener datos del cono

7. **Observa el cono de la derecha y responde.**



a. ¿Qué figura plana se forma con la altura del cono, el radio de la base y la generatriz? Remárcala y explica sus características. ______

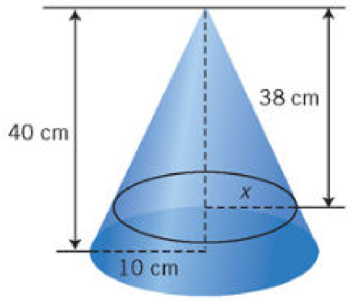
b. Argumenta por qué se puede afirmar que:

Al disminuir la medida de la altura del cono se forman dos triángulos semejantes.

______

c. Socializa tus argumentos con el grupo y registra los acuerdos. Con base en ello, establece la igualdad entre las razones para obtener la medida del radio al disminuir 2 cm la altura del cono:

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



© SANTILLANA

d. Al establecer la igualdad entre las razones, ¿pueden obtenerse las medidas que tendrán los radios al hacer cortes consecutivos de x medida al cono? Explica cómo.

e. Un cono mide 15 cm de altura y tiene una base con un radio de 8 cm. Usa la razón de semejanza para determinar el radio de los círculos formados al hacer los siguientes cortes paralelos a la base.

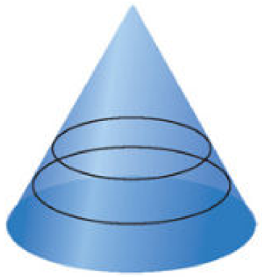
- 1 cm ______
- 3 cm ______
- 6 cm ______
- 0.5 cm ______
- 4.5 cm ______
- 7.5 cm ______

› Socializa tus respuestas. Si es necesario corrígelas. Después, registra los acuerdos a los que lleguen bajo la guía de su profesor.

Razones trigonométricas para obtener datos del cono

8. **Reúnanse en pareja y realicen lo que se plantea.**

En un cono que mide 16 cm de altura y 6 cm de radio en su base, se hacen cortes paralelos de 0.5 cm a su base.



- Identifiquen en la imagen de la izquierda el triángulo rectángulo formado por la altura, el radio y la generatriz y respondan: ¿con qué valores pueden determinar la medida del ángulo formado por la generatriz y el radio? ______
- ¿Cuál es la medida del ángulo que se genera? ______
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para determinar el valor del radio (x) al hacer un corte paralelo a la base del cono? Sustenten su respuesta. ______

a. Con base en la medida del ángulo y el procedimiento anterior, que involucra el uso de razones trigonométricas, completen la tabla.

h (altura del cono en cm)	r (radio de la base en cm)	h (altura del cono en cm)	r (radio de la base en cm)
15		14.5	
14		13.5	
13		12.5	
12		11.5	
11		10.5	
10		9.5	
9		8	

© SANTILLANA

b. Revisen la tabla anterior y respondan.

- ¿Qué patrón o regularidad pueden identificar en los datos de la tabla? ______
- ¿Este procedimiento es de utilidad para obtener datos de otros conos? Expliquen.
- ¿Qué otros procedimientos pueden aplicar para responder lo solicitado? ______ ¿Los datos de la tabla tienen una relación proporcional? ¿Por qué? ______
- De ser afir ativa su respuesta, expliquen de qué tipo de proporcionalidad se trata.

› Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos.

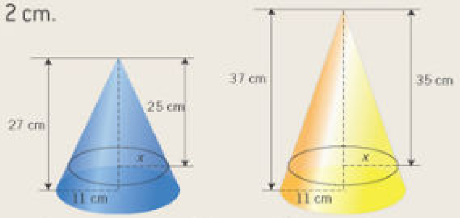
9. **En grupo, revisen lo que han hecho en esta lección.**

- Comenten acerca de sus experiencias al analizar las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto.
- Describan la forma de las secciones cónicas.
- Acuerden cómo son los procedimientos empleados para calcular las medidas de los radios de los círculos que resultan de hacer cortes paralelos en un cono recto.
- Complementen sus experiencias visitando los sitios sugeridos en la sección de apoyo tecnológico.

› Registren sus conclusiones después de que hayan sido validadas por su maestro. Expresen las dificultades que enfrentaron para realizar las tareas de la lección y compartan cómo las resolvieron.

Reto — Círculos al cortar un cono

1. **Responde en el cuaderno.**
   a. Se tienen dos conos, el azul y el amarillo. A ambos se les hacen cortes paralelos a la base de 2 cm.



- Determina cuántos cortes se deben realizar a cada cono para que en ambos la medida de la altura sea 19 cm. Con esa altura, ¿cuál cono tiene mayor radio?

2. **Retoma los conos anteriores y plantea un problema que se pueda resolver con los datos dados.**
   - Discute tus experiencias en grupo, anota las dificultades o dudas que tuviste y socialízalas para que sean aclaradas en grupo.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás ampliar la información sobre:

Cortes al cilindro

www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cylinderobliq.html

Visualización de secciones cónicas:

www.dmae.upct.es/ffpepemar/conicas/index.htm

Secciones cónicas:

www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/conicas-secciones.html

Ingresa a la página que se indica; busca el título Álgebra II, y selecciona los videos Introducción a las secciones cónicas.

https://es.khanacademy.org/

Discute con tus compañeros la información de la página y analicen los ejemplos propuestos. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

30 Volumen de cilindros y conos

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

Comparación de conos y cilindros

1. Organizados en pareja, realicen lo que se pide.

a. En una neveria sirven malteadas en envases como los que se muestran.

Se sabe que una malteada está servida en un vaso cilíndrico cuya base mide 90 mm de diámetro y que tiene 165 mm de altura; cada copa tiene como base 90 mm de diámetro y 165 mm de altura.

- Si un vaso cuesta lo mismo que tres copas, ¿en qué opción se adquiere mayor cantidad de malteada? Expliquen por qué.
- Discutan esta afirmación: "Si el vaso de malteada cuesta lo mismo que las tres copas, entonces, las copas contienen igual cantidad de malteada que el vaso". ¿Están de acuerdo con ella? Expliquen por qué.
- Planteen una forma de verificar si la afirmación anterior es verdadera o en qué condiciones puede serlo. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

b. Para comprobar la afirmación planteada en el inciso anterior, se puede calcular el volumen del vaso y el de las tres copas. Discutan y propongan un procedimiento para calcular el volumen de un cilindro.

c. A continuación se presentan los procedimientos que siguieron dos equipos. Analícenlos y compárenlos con el que ustedes hicieron.

Equipo 1. Repasamos lo que ya sabemos sobre los prismas: el volumen de un prisma es igual al área de la base por la altura. Entonces, si tomamos un prisma parecido a un cilindro (por ejemplo, un prisma cuya base tenga 20 lados), para obtener el volumen de un cilindro se puede aplicar un procedimiento similar al de dicho prisma.

Equipo 2. Obtuvimos la medida del área de una de las bases del cilindro. Si imaginamos el cilindro como un grupo de muchos círculos, apilados unos encima de otros, entonces su volumen puede obtenerse al multiplicar la medida del área de la base por la de su altura.

© SANTILLANA

- ¿Les parece razonable el argumento del equipo 1 para relacionar el cálculo del volumen del prisma con el cálculo del volumen del cilindro? Expliquen por qué.
- ¿Con qué fórmula podemos calcular el volumen de un prisma regular?
- Analicen el procedimiento indicado por el equipo 2, y el argumento que dan para justificarlo. ¿Les parece válido? Indiquen por qué.
- Supongan que cortan 100 cilindros de 1 mm de altura y los colocan uno encima del otro. ¿Qué cuerpo se forma y cuál sería su altura?
- Expliquen si hay coincidencias entre los procedimientos de los equipos 1 y 2 y el que ustedes plantearon y registren cuáles son.

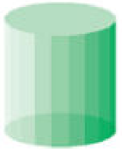
› Socialicen sus argumentos bajo la guía del profesor y registren sus conclusiones.

Fórmula del volumen del cilindro

2. En pareja, realicen estas actividades.

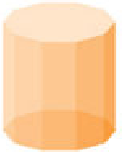
a. Analicen los prismas regulares y determinen la medida del volumen de cada uno.

20 lados en la base
Lado de la base: 3.1 cm
Apotema: 9.87 cm
Altura del prisma: 10 cm



Volumen

10 lados en la base
Lado de la base: 6.2 cm
Apotema: 9.5 cm
Altura del prisma: 10 cm

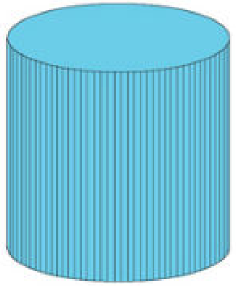


Volumen

- ¿Qué prisma tiene mayor volumen?

b. El prisma de la derecha: tiene 30 lados en su base. Cada lado mide 2.1 cm, su apotema 9.9 cm y su altura es de 10 cm. ¿Cuál es su volumen?

- Si se construye un prisma recto de 1 000 lados en su base, ¿puede considerarse como un cilindro recto? Expliquen por qué.



c. En todos los prismas trabajados, la medida de los vértices de la base al centro de la misma es de 10 cm.

- ¿Cuál es volumen de un cilindro con cuyo radio de la base es de 10 cm?
- ¿Qué relación observan entre el número de lados de los prismas y su volumen con el volumen del cilindro?

d. En pareja, relean los procedimientos del inciso c de la página 242.

- Argumenten si ahora están de acuerdo con que el volumen de un cilindro se puede calcular de forma similar a como se calcula el volumen de un prisma y por qué.

© SANTILLANA

3. **En grupo, lean la información y luego hagan lo que se indica.**

El volumen de un **cilindro** cualquiera puede calcularse multiplicando el área de la base por la altura, es decir, usando la expresión o fórmula $V = \pi r^2 h$.

- Expliquen por qué en la fórmula se escribió πr^2 y qué significa cada elemento que integra la expresión. ______

a. Trabajen en equipo para trazar en su cuaderno los cilindros y calcular su volumen.

- **Cilindro 1**
  Radio de la base = 1 cm
  Altura = 3 cm
  Volumen ______
- **Cilindro 2**
  Radio de la base = 2 cm
  Altura = 6 cm
  Volumen ______
- **Cilindro 3**
  Radio de la base = 4.67 cm
  Altura = 9.34 cm
  Volumen ______

› Socialicen sus resultados y corríjanlos. Expliquen las ventajas de usar una fórmula para calcular el volumen de cilindros. Registren sus acuerdos.

Pirámides y conos

4. **En pareja, repasen la situación planteada en la página 242 y hagan estas actividades.**

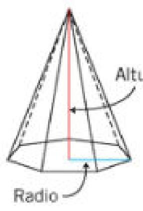
- Discutan y propongan un procedimiento para calcular el volumen de un cono. ______

5. **Lean y respondan las preguntas.**

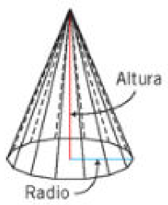
a. Gilberto, un integrante del equipo 1, afirma que para determinar la fórmula para calcular el volumen del cono pueden emplearse los conocimientos sobre las pirámides regulares.

- ¿Es cierto lo que dice Gilberto? Expliquen por qué. ______
- Identifiquen a qué cuerpo se refiere esta afirmación: "La altura es la perpendicular que parte del vértice y llega a la base": ______

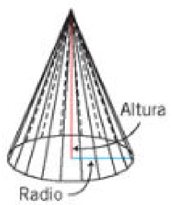
b. Analicen las pirámides y respondan las preguntas.



Pirámide heptagonal



Pirámide tetragonal



Pirámide icosagonal

© SANTILLANA

- ¿A qué figura tiende a parecerse el polígono de la base de la pirámide, conforme se incrementa su número de lados? ______ ¿Qué relación tiene esa figura con la base del cono? ______
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de una pirámide? ______
- Con base en lo que han visto hasta ahora, ¿cuál sería la fórmula para calcular el volumen de un cono? ______

› Comenten con otras parejas sus respuestas a las actividades anteriores y tomen nota de sus observaciones.

Fórmula del volumen del cono

6. **Organícense en pareja y realicen lo que se pide.**

a. Discutan si existe alguna relación entre el cilindro y el cono y especifiquen cuál es.

- Registren sus conclusiones. ______

b. Construyan un cono y un cilindro que tengan la misma medida de la base y altura (acuerden las medidas en grupo). Consigan frijol, arroz u otra semilla.

- Anticipen: si se llena el cono con las semillas, ¿cuántas veces se necesitará vaciar el contenido de este en el cilindro para llenarlo? ______
- ¿Qué parte del volumen del cilindro representará el volumen del cono? ______

c. Llenen el cono con las semillas y vacíenlo en el cilindro. Repitan el procedimiento hasta que el último se llene.

- Expliquen si acertaron sus anticipaciones de los incisos a y b. ______
- ¿Qué relación hay entre el volumen del cilindro y el volumen del cono? ______

7. **Lean la información en sesión grupal.**

Para calcular el **volumen de un cono** cualquiera se multiplica el área de la base por la altura, y el producto obtenido se divide entre tres; esto se resume con la fórmula: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

- Expliquen qué significado se asocia con el hecho de que "el producto obtenido se divide entre tres" en la fórmula anterior. ______

© SANTILLANA

- Apliquen las fórmulas que han justificado para calcular el volumen del cono y del cilindro que construyeron en la actividad 6. ______

- Comparen los resultados obtenidos en el punto anterior. Expliquen cómo se relacionan estos con lo observado al transvasar las semillas. ______

8. Trabajen en pareja para resolver lo siguiente.

a. Calculen el volumen de los conos.

Cono 1	Cono 2	Cono 3
Radio de la base = 1 cm	Radio de la base = 2 cm	Radio de la base = 4.67 cm
Altura = 3 cm	Altura = 6 cm	Altura = 9.34 cm
Volumen ______	Volumen ______	Volumen ______

b. Revisen las actividades 3a y 8a y hagan lo siguiente.

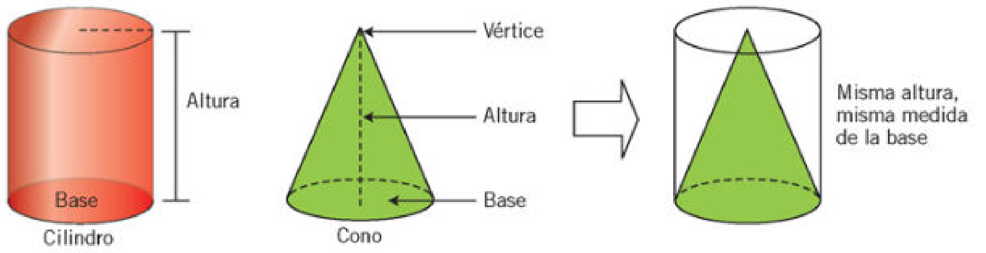
- Comparen la medida del cilindro 1 con la medida del volumen del cono 1. ¿Cómo son los volúmenes? ______
- Comparen los volúmenes del cilindro 2 y del cono 2, así como los del cilindro 3 y del cono 3. ¿Qué relación hay? ______

c. Completen la expresión.

Cuando un cilindro recto tiene ______ y ______ iguales a las de un cono, su volumen es igual a ______ veces el volumen de dicho cono.

- Lean la información y complementen su respuesta anterior, de ser necesario.

El volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro, siempre y cuando la medida de la altura y base del cono sean iguales a la medida de la altura y base del cilindro.



© SANTILLANA

d. Revisen la oferta planteada al inicio de la página 242 y, con base en lo que saben ahora, expliquen qué promoción conviene más adquirir y por qué. ______

› Con la guía de su profesor, concluyan respecto de la relación entre el volumen de un cono y el de un cilindro. Tomen nota en su cuaderno.

Volumen del cono y del cilindro

9. Reúnete con dos compañeros y resuelvan.

a. En un congreso se instaló el servicio de cafetería, y para quienes no consumen café, se suministró agua en garrafones de forma cilíndrica que miden 37 cm de alto. Para servir el agua se pusieron vasitos cónicos de 92 mm de diámetro por 128 mm de altura. Se estima que con cada garrafón se llenarán 80 vasitos cónicos.

- Según los datos anteriores, ¿cuál sería la medida de la base del garrafón? ______
- ¿Cuál sería la capacidad del garrafón? ______
- Describan el procedimiento para obtener cada respuesta. ______

b. Retomen el planteamiento que está al inicio de esta lección. Consideren que el vaso cilíndrico tiene capacidad de 1 litro.

- Expliquen cuáles podrían ser las medidas del cilindro para que cumpla con la condición anterior. ______
- Si el recipiente cilíndrico y las tres copas contienen la misma cantidad de malteada, ¿cuáles pueden ser las medidas de cada uno? Expliquen. ______

› Revisen sus respuestas y argumentos. Corríjanlos de ser necesario.

Reto Volúmenes

1. Reunidos en pareja, realicen lo que se pide.

a. Planteen un procedimiento con el fin de construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides; tengan en cuenta su experiencia al resolver las actividades de esta lección.

- Elaboren un tríptico informativo o un mapa conceptual que concentre las ideas fundamentales del tema.
- Presenten su producto al grupo y valídenlo. Después, discutan sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que tuvieron y socialícenlas, para resolverlas.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás encontrar información sobre la relación entre el cono y el cilindro:
www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso1/htmlb/SEC_53.HTM
Discute con tus compañeros la información de la página anterior y analicen los ejemplos propuestos. (consulta: 27 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

31

Cálculo del volumen de cilindros y conos

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida

Contenido: Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

Dulces cónicos y cilíndricos

1. **En equipo, realicen lo que se solicita.**

a. Algunos caramelos tienen diferentes formas geométricas. Observen las imágenes y respondan.

Los pirulís son caramelos en forma de cono que miden entre 6 cm y 10 cm de alto.

Algunos caramelos tienen forma cilíndrica y pueden medir entre 2 cm y 16 cm de alto.

- ¿Qué datos se requieren para calcular el volumen de caramelo de un pirulí? __________

b. Con base en la información que se proporciona en las imágenes determinen si es posible estimar el volumen de...

- un pirulí de 15 cm de altura. ¿Por qué? __________
- un caramelo cilíndrico de 5 cm de altura. ¿Por qué? __________

c. La tabla muestra las medidas de los moldes que emplea un fabricante para hacer los pirulíes. Calculen y completen.

	Molde 1	Molde 2	Molde 3	Molde 4	Molde 5	Molde 6
Altura (cm)	10	11	12	13	14	15
Radio de la base (cm)	4	4	4	4	4	4
Área de la base (cm^2)						
Volumen (cm^3)						

© SANTILLANA

© SANTILLANA

- ¿Qué volumen de caramelo se requiere para elaborar 12 pirulís con el molde 6? __________
- ¿En cuál de las siguientes opciones se ocupa mayor cantidad de caramelo: en 12 piezas de pirulís de 10 cm de alto o en 6 piezas de 15 cm de alto? ¿Por qué? __________
- ¿Cómo varía la medida del volumen cuando el radio permanece constante y la altura cambia? Argumenten. __________

d. La tabla muestra la medida de pirulís que utiliza otro fabricante. Consideren la información, hagan los cálculos y complétenla.

Pirulís con forma cónica			
Medida de la altura (cm)	Radio de la base (cm)	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
12	4.0		
12	4.2		
12	4.4		
12	4.6		
12	4.8		
12	5.0		

- ¿Cómo es el volumen de caramelo cuando la altura de los pirulís permanece constante y la medida del radio cambia? Argumenten. __________
- Analicen los datos que obtuvieron en las tablas anteriores y determinen las medidas que puede tener un pirulí si se quiere hacer con la menor cantidad de caramelo. Argumenten. __________
- ¿Las conclusiones que obtuvieron aplican para todos los conos? Argumenten sus respuesta, planteen al menos dos ejemplos para validarlas. __________

e. Comenten sus respuestas con sus compañeros de grupo, y con ayuda del profesor discutan las conclusiones que obtuvieron acerca del volumen de los pirulís.

f. En la tabla se muestran las medidas del volumen de dos tipos de cono; comparen la información y respondan las preguntas.

Cono tipo A			Cono tipo B		
Medida de la altura (cm)	Radio (cm)	Volumen (cm^3)	Medida de la altura (cm)	Radio (cm)	Volumen (cm^3)
10	4.2	184.72	11	3.8	166.33
10	4.4	202.73	12	3.8	181.45
10	4.6	221.58	13	3.8	196.58
10	4.8	241.27	14	3.8	211.70
10	5	261.80	15	3.8	226.82

- ¿Cómo son los volúmenes de los conos tipo A respecto de los conos tipo B? ____________
- ¿Cómo aumenta el volumen de los conos cuando la medida de la altura se mantiene fija y el radio varía? Argumenten. ____________
- ¿Cómo aumenta el volumen de los conos cuando la altura varía y se mantiene fija la medida del radio? Argumenten. ____________

› Comparen sus conclusiones con las que obtuvieron en el inciso e. Si lo consideran necesario, compleméntenlas.

Cilindros

2. **En pareja, registren las características de un cilindro recto.**

a. Las tablas muestran las medidas de caramelos cilíndricos. Calculen y completen.

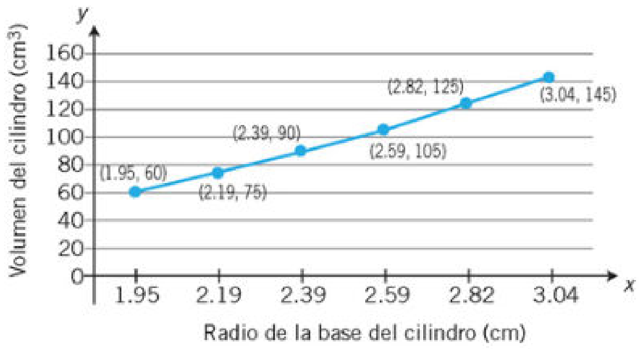
Altura (cm)	Radio de la base (cm)	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)	Altura (cm)	Radio de la base (cm)	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
10	1			4	2		
10	1.2			6	2		
10	1.4			8	2		
10	1.6			10	2		
10	1.8			12	2		
10	2			14	2		

© SANTILLANA

- ¿Cómo varía el volumen del cilindro cuando la altura permanece constante y la medida del radio cambia? ____________
- ¿Qué sucede con el volumen del cilindro cuando la medida del radio permanece constante y la altura cambia? ____________

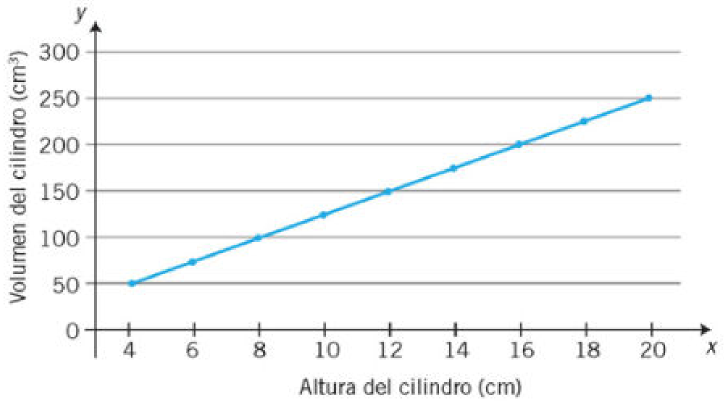
3. **En equipo analicen las gráficas y respondan.**

a. La gráfica representa la variación del volumen de un cilindro.



- Escriban la medida de la altura de cada cilindro. ____________
- ¿Cómo es la medida del radio de la base en cada caso? ____________
- ¿Qué tipo de gráfica es? ____________

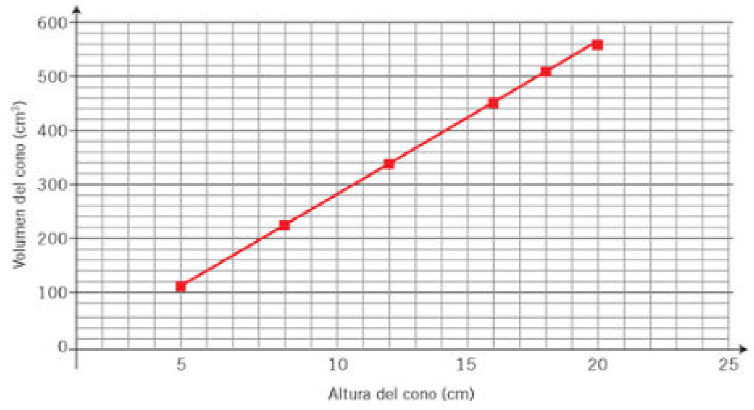
b. Analicen la gráfica y contesten.



- ¿Qué relación representa la gráfica? ____________
- ¿Qué características presenta la gráfica? ____________
- ¿Qué sucede con el área de la base? ____________
- ¿Cuál es el radio de la base de cada cilindro? ____________

© SANTILLANA

c. Analicen la gráfica y hagan lo que se solicita.



- ¿Qué relación representa la línea roja? ____________
- Comparen las gráficas de los ejercicios a, b y c y expliquen cómo varía el volumen.

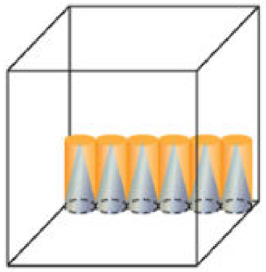
› Comenten sus respuestas con sus compañeros y en grupo analicen si es posible afirmar que:

"La altura y el volumen tanto del cono como del cilindro varían proporcionalmente cuando el radio permanece constante. En cambio, cuando en un cono o en un cilindro la medida de su altura se mantiene fija, se establece una relación cuadrática entre la medida del radio (que es constante) y la medida de su volumen".

Con ayuda del profesor establezcan acuerdos y validen su respuesta anterior.

Otros problemas

4. En pareja, resuelvan los problemas y justifiquen sus resultados.



a. Un fabricante de conos decorativos de cristal, para transportarlos, los envuelve de manera individual en botes de plástico que guarda en cajas, como se muestra en la imagen. Los botes miden 4.5 cm de radio y 10.5 cm de alto.

- Si en cada caja caben seis botes a lo largo, seis a lo ancho y cuatro a lo alto. ¿Qué volumen de cristal transporta en cada caja? ____________
- Si envía 560 cajas de estos conos, ¿qué volumen de cristal exporta? ____________

b. Si se construyera la cara lateral de un envase cilíndrico con una lámina de latón de 38 cm de ancho por 52 cm de alto, ¿cuál sería su capacidad si se enrolla a lo largo?

- ¿Y si se enrolla a lo ancho? ____________
- Un triángulo rectángulo de lados 5, 6 y 7.81 cm gira 360° alrededor de su cateto mayor.
- ¿Qué superficie genera? ____________
- Calculen el área y el volumen de la superficie generada. ____________

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Lluvia y su familia elaboran y envasan mermeladas de frutas de temporada. Para prepararlas usan un colador chino que tiene 23 cm de diámetro y 20 cm de altura, como el que se muestra en la imagen; en este depositan la pulpa de la fruta para eliminar el exceso de agua. Luego vierten el contenido en una cacerola con azúcar para preparar la mermelada.

- ¿Cuál es el volumen de pulpa que se obtiene al llenar un colador chino con las medidas dadas? ____________
- Una vez que se tiene el almíbar, la pulpa se reduce 25%. ¿Qué cantidad de pulpa se requiere para llenar un tarro de 500 cm³? ____________

d. Lluvia y sus hermanas están interesadas en vender conos rellenos de ate elaborados con frutos de la temporada. En la tabla se muestran las medidas de los conos que están considerando. Determinen el volumen de ate que puede contener cada uno y después contesten las preguntas.

Cono	Altura (mm)	Diámetro (mm)	Volumen (mm³)
A	140	42	
B	138	45	
C	148	48	
D	131	45	
E	132	48	

- ¿Qué cono puede contener el volumen máximo de fruta? ____________
- ¿Cuál el mínimo? ____________

› Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Comenten los procedimientos que siguieron y si es necesario corrijan.

Reto Volumen

1. Retoma los datos de la tabla y plantea un problema en el que se requiera calcular el volumen de conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Cono	Altura (cm)	Diámetro (cm)	Volumen (cm³)
1	132	39	52 562.11
2	144		90 515.78
3		50	98 175
4	112	47	64 771.41
5	116		69 969.72

› Intercambien sus problemas con sus compañeros. Analicen tanto el planteamiento como los resultados que obtuvieron. Con ayuda del profesor, concluyan.

Apoyo tecnológico

En los siguientes sitios podrás ampliar la información sobre el cálculo del volumen del cono y el cilindro:

www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/cono.html

www.portalplanetasedna.com.ar/volumenes.htm

Ingresa a esta página y haz la actividad 3, que tiene que ver con el cálculo del volumen del cilindro:

www.aplicaciones.info/decimales/geoes04.htm

Comenta con tus compañeros la información que encontraste y analicen los ejemplos propuestos. (27 de diciembre de 2016)

32

Variación lineal y cuadrática

Eje: Manejo de la información
Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Gráficas y expresiones algebraicas de variación

1. En pareja, analicen la información y realicen lo que se solicita.

Glosario

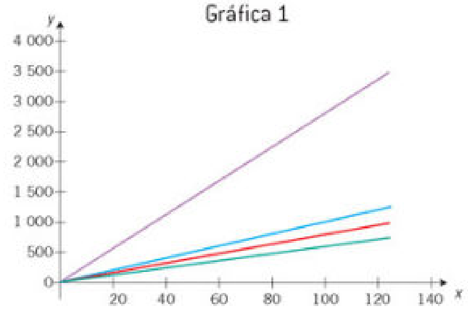
modelar. En matemáticas, es representar mediante gráficas, ecuaciones u otros procedimientos, un hecho o fenómeno.

Samuel heredó 17 hectáreas para sembrar y decidió cultivar 3 500 árboles de naranja. Para descargar de un camión los árboles que va a sembrar, contrató a Joel, Vicente y Antonio. Los cuatro realizan la misma cantidad de viajes para descargarlo, pero en cada trayecto Samuel baja 8 árboles; Joel, 4; Vicente, 6, y Antonio, 10.

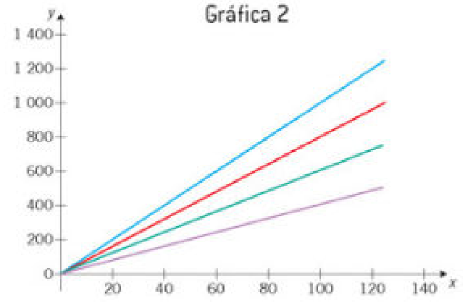
a. Escriban una expresión algebraica que **modele** la cantidad de árboles que puede descargar cada persona.

- Samuel: ____________
- Joel: ____________
- Vicente: ____________
- Antonio: ____________
- ¿Qué tipo de función modelan las expresiones algebraicas anteriores: lineal o cuadrática? Justifiquen. ____________
- ¿Cuántos viajes deben realizar para descargar el camión? Expliquen su respuesta. ____________

Gráfica 1



Gráfica 2



b. Seleccionen la gráfica que modela la situación descrita. Argumenten su elección. ____________

- ¿La gráfica modela una situación de proporcionalidad? Expliquen. ____________
- ¿Qué tipo de proporcionalidad es? Justifiquen. ____________
- ¿Qué diferencias encuentran entre la gráfica 1 y la 2? ____________
- Dada la gráfica 2, ¿cuántos árboles descargan las cuatro personas después de realizar 40, 60 y 100 viajes? Argumenten. ____________

› Socialicen sus respuestas y valídenlas en grupo con ayuda del profesor.

© SANTILLANA

Gráficas y tablas de variación

2. Resuelve en equipo la actividad.

Alfonsina es la encargada del área de costos de producción en una fábrica de cartón, donde hacen cajas con forma de cubo, como las que se muestran, para la temporada navideña. Ella debe calcular los costos del material para cada caja. Una de las cuales tiene un volumen de 0.216 m^3.

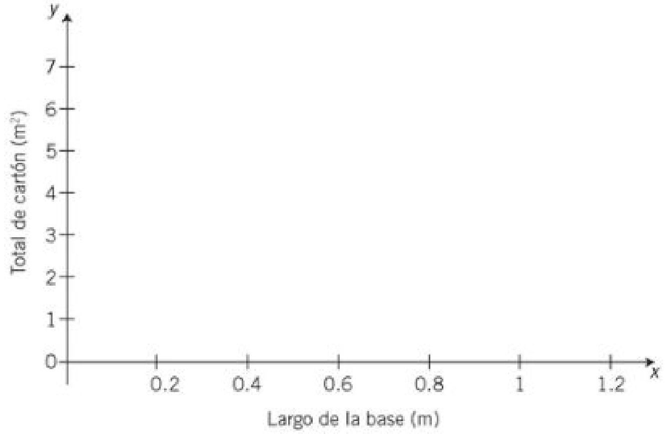
- Sin considerar las pestañas de la caja, ni la tapa, ¿cuánto cartón se requiere para las caras laterales y la base? Expliquen. ____________

a. Determinen una expresión algebraica que permita conocer la cantidad de cartón que se requiere para las caras laterales y la base de las cajas, sin considerar las pestañas ni la tapa. Argumenten su expresión. ____________

- ¿La expresión algebraica que obtuvieron representa una función lineal o cuadrática? Sustenten su respuesta. ____________
- Al graficar la expresión algebraica, ¿se obtiene una línea recta o una curva? Argumenten su respuesta. ____________

b. Utilicen la siguiente tabla y complétenla con la información que hace falta. Luego, auxiliándose de esos datos, tracen la gráfica correspondiente.

Largo de la base (m)	Total de cartón (m^2)
0.40	
0.45	
0.50	
0.55	
0.60	1.8
0.65	
0.70	
0.75	
0.80	
0.85	
0.90	
0.95	
1.00	



c. Analicen la gráfica y contrasten las respuestas que dieron a las primeras cuatro preguntas; en caso necesario, corrijan.

- ¿Es posible que a partir de algún dato real la gráfica pase por las coordenadas (0, 0)? Expliquen. ____________

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y valídenlas con el profesor.

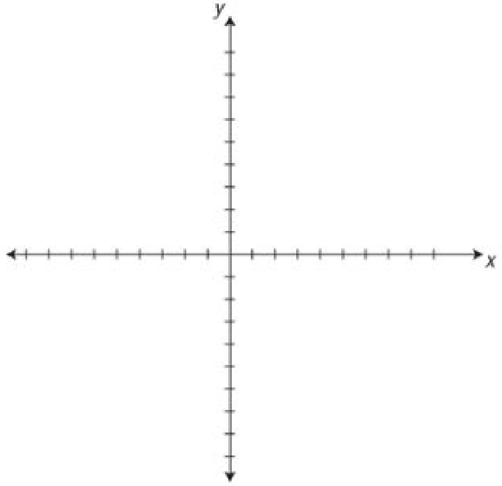
© SANTILLANA

Modelar con gráficas y expresiones algebraicas

3. Analicen los problemas y realicen lo que se indica. Respondan en el cuaderno.

a. Mauricio decidió construir una cisterna en su casa. La capacidad real para almacenar agua es de 2 m de ancho, 2 m de largo y 2.5 m de altura.

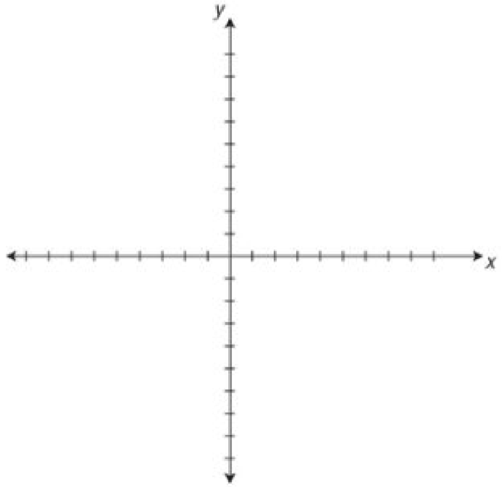
Plano cartesiano 1



- ¿Cuál es el volumen de la cisterna? ______
  Mauricio calcula que, al llenar su cisterna, caen 33 litros de agua cada 15 minutos.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar la situación? ______
- ¿La expresión que obtuvieron es una función lineal o cuadrática? ______
- Construyan en el plano cartesiano 1 la gráfica que modela la situación; elaboren en su cuaderno un registro tabular.
- ¿Cuánto tiempo transcurre para que en la cisterna entren 132 litros de agua? ¿Y para 660 litros? ______
- ¿Cuántos litros de agua se tendrán en la cisterna después de 9 horas? ¿Y si pasan 13 horas? ______

b. Roberto es comerciante de flores y su hijo le comentó que la expresión: $-x^2 + 22x = 0$ le ayudaría a determinar la cantidad de ramos que necesita vender para obtener la mayor ganancia posible.

Plano cartesiano 2



- ¿Con qué cantidad de ramos no se obtiene ninguna ganancia? ______
- ¿Qué tipo de función es la que modela la cantidad de ramos y el precio? ______
- ¿Qué cantidad de ramos de flores es la que se vende a mayor precio? ______
- Obtengan la gráfica que modela la situación en el plano cartesiano. Elaboren un registro tabular.
- Si Roberto tiene 5, 9 y 18 ramos respectivamente, ¿cuál es precio al que debe venderlos? ______
- Si Roberto vende los ramos a \$57, \$105 y \$120, ¿cuántos ramos de flores tiene? Justifiquen. ______

› En sesión grupal, comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si existen dudas o diferencias, resuélvanlas con el apoyo del profesor.

© SANTILLANA

4. Realicen lo que se pide a partir de los siguientes registros tabulares.

Tabla 1

r	0	1	2	3	4	5	6	...
t	0	1	8	27	64	125	216	...

Tabla 2

m	0	20	40	60	80	100	120	...
p	0	36	72	108	144	180	216	...

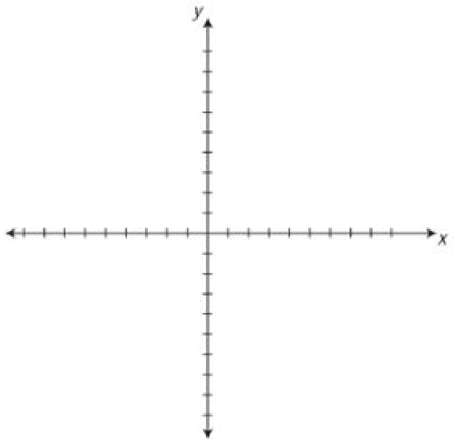
a. Del registro de la tabla 2:

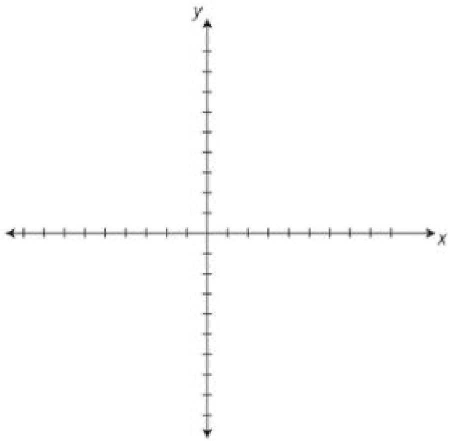
- ¿Qué tipo de función representa? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela dicha función? ______
- ¿Es una recta o curva que pasa por el origen? ¿Qué determina lo anterior? ______
- Si esta representa una función lineal, ¿es de proporcionalidad? ______
- Escriban un problema que se pueda modelar con dicha función: ______

b. Del registro de la tabla 1:

- ¿Qué tipo de función representa? ______
- Si se grafica, ¿es una recta o curva que pasa por el origen? ______
- Si esta representa una función cuadrática, ¿es de proporcionalidad? Justifiquen. ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela dicha función? ______
- Escriban un problema que se pueda modelar con ella: ______

c. Para comprobar sus respuestas, dada la información de los registros tabulares, tracen la gráfica que modela cada caso en el plano cartesiano correspondiente.





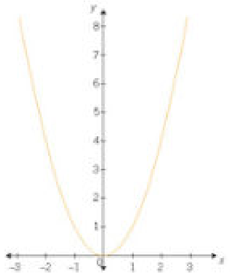
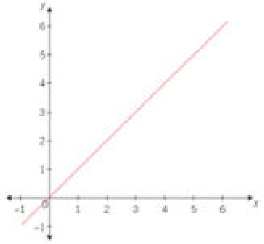
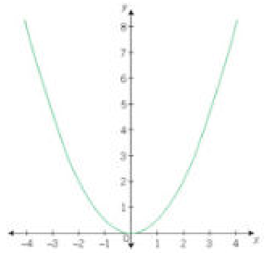
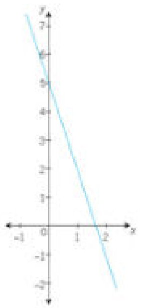
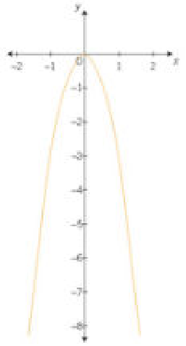
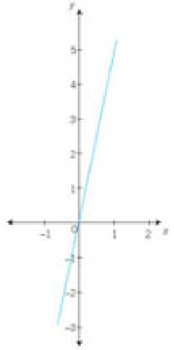
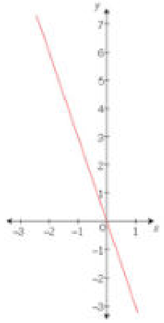
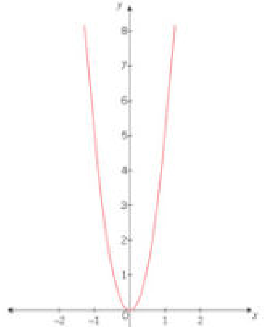
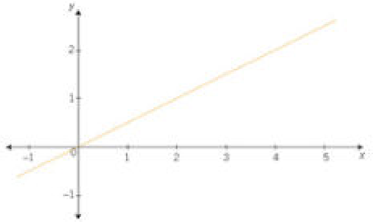
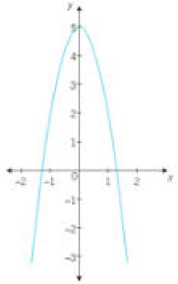
› Socialicen sus respuestas y valídenlas en grupo con apoyo del profesor .

© SANTILLANA

Relación entre gráficas y expresiones algebraicas

5. **En pareja, escriban cada expresión algebraica junto a la gráfica correspondiente.**

- $y = 0.5x^2$
- $y = 0.5x$
- $y = -3x$
- $y = 5x$
- $y = -3x^2 + 5$
- $y = 5x^2$
- $y = x^2$
- $y = x$
- $y = -3x + 5$
- $y = -3x^2$

a. En su cuaderno sustenten el procedimiento que utilizaron para relacionar las expresiones cuadráticas y lineales con su respectiva gráfica.

b. Considerando únicamente las funciones cuadráticas, contesten en su cuaderno:

- ¿Qué término de una función cuadrática falta para que el vértice esté sobre el eje de las ordenadas, en un punto que no sea el origen?
- ¿Qué determina que la curva de la función cuadrática abra hacia arriba o hacia abajo sobre el eje de las ordenadas?
- ¿Cuál es el comportamiento de la función cuadrática en la medida que el valor del coeficiente del término cuadrático tiende a ser cero?

© SANTILLANA

c. Analicen la siguiente información y contrástenla con su última respuesta. Corrijan o completen lo que consideren necesario. Después, respondan en su cuaderno.

Cuando se tiene una función cuadrática, como por ejemplo ax^2, el eje de las ordenadas corta a la curva de la función en dos partes iguales; si el coeficiente a es negativo, la curva se abre hacia abajo, pero si el coeficiente es positivo, la curva se abre hacia arriba. Otro aspecto es que en la medida que el coeficiente a tiende a ser cero, la curva se aleja del eje de las ordenadas; es decir, la curva se acerca al eje de las abscisas.

- Considerando las funciones lineales, ¿qué gráficas representan una relación de proporcionalidad? Expliquen.
- ¿Qué gráficas no son de proporcionalidad? ¿Por qué?
- ¿Qué gráficas tienen una pendiente negativa? Argumenten.
- ¿Cuál es el comportamiento de la función lineal en la medida que el valor de la pendiente tiende a ser cero? Justifiquen.

› De manera grupal, escriban en su cuaderno los acuerdos que hagan sobre las características de situaciones problemáticas, asociadas con distintos fenómenos en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Reto — Vacaciones en familia

1. **Reunidos en pareja, resuelvan los siguientes problemas.**

a. Raúl regresa de vacaciones con su familia. En la imagen 1 se muestra el kilometraje total del automóvil (050522 km), mientras que el dato de 750.9 corresponde al kilometraje recorrido desde que salieron del hotel a cierto punto del camino. La imagen 2 muestra el kilometraje del automóvil al llegar a su casa. Supongan que Raúl viajó a una velocidad constante de 110 km/h.

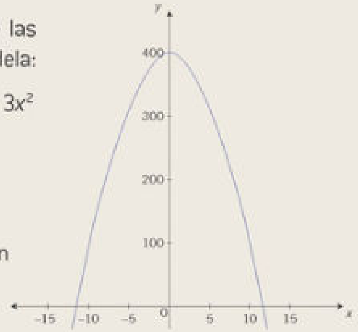
Imagen 1

Imagen 2

- ¿Qué expresión algebraica modela la relación distancia-tiempo?
- A partir de los datos de las imágenes, ¿qué tiempo hizo Raúl en ese trayecto?
- ¿Cuánto tardó en ir del hotel a su casa?
- Realicen la gráfica correspondiente a la situación mencionada. ¿Es esta una relación de proporcionalidad?

b. Analicen la gráfica y determinen cuál de las siguientes expresiones algebraicas la modela:

$l = 400 - 3x$ $\quad l = 400x - 3x^2$ $\quad l = 400 - 3x^2$



- Planteen un problema que se pueda modelar con la gráfica y expresión algebraica.

› Socialicen sus respuestas en grupo y registren sus acuerdos en su cuaderno.

Apoyo tecnológico

Ingresa al siguiente sitio:
http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_fi al_es.html
Analiza el problema planteado y obtén en tu cuaderno la gráfica que modela la situación.

Entra al siguiente sitio y practica lo realizado durante la lección:
www.thatquiz.org/es-0/matematicas/algebra/
Comparte tu experiencia con el interactivo y discute con tus compañeros tus conclusiones; si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

33 Equiprobabilidad en juegos de azar

Eje: Manejo de la información
Tema: Nociones de probabilidad

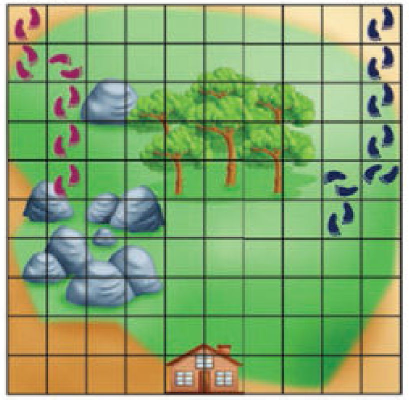
Contenido: Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

De regreso a casa

1. **Reúnanse en pareja para jugar "De regreso a casa".**

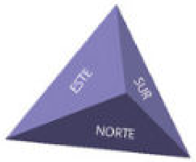
El juego consiste en avanzar por un camino para regresar a casa. Gana el jugador que llegue primero. Para jugar, necesitan un dado con forma de tetraedro con los nombres o iniciales de los puntos cardinales y un tablero, como los que se muestran:

Brenda Karla



Las reglas del juego son:

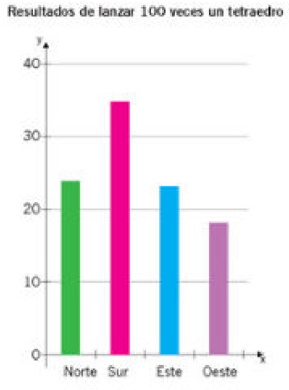
- Cada jugador se coloca en una de las esquinas superiores del tablero; por turnos, lanza el dado y avanza una casilla en la dirección que marque la cara del dado que quede abajo. Si al lanzar el dado la dirección indica que el movimiento sea hacia afuera del tablero, pierde el turno.



a. Construyan su tablero (no consideren las huellas, solo la retícula) y su dado. Antes de jugar, respondan.

- ¿Alguno de los jugadores tiene mayor probabilidad de ganar el juego? ¿Por qué? ______
- Discutan si el juego es justo para ambos jugadores y anoten sus acuerdos.

b. Jueguen "De regreso a casa"; después registren los resultados obtenidos en cada lanzamiento y determinen si alguno de ustedes tuvo alguna ventaja o no.



c. Karla usó un simulador virtual y graficó los resultados de lanzar 100 veces el tetraedro. Con base en ello afirma que sí hay ventaja para uno de los jugadores, porque salió "Sur" 35 de 100 veces.

- ¿Están de acuerdo con ella? Expliquen. ______
- Si se lanza 100 veces más el dado en el simulador, ¿se tendrían los mismos resultados? ¿Por qué? ______
- ¿Qué significado pueden darle al hecho de que en un juego de azar existan resultados equiprobables? ______

› Comenten su respuesta con el grupo y valídenla con el profesor. Después registren sus conclusiones en el cuaderno.

© SANTILLANA

Resultados equiprobables

2. **Realicen en pareja lo que se solicita.**

a. En el tablero de la página anterior se muestra el juego que iniciaron Brenda y Karla. Las huellas representan el avance de las niñas. Respondan en su cuaderno.

- ¿Qué resultados le han salido a Brenda? Regístrenlos.
- ¿Y a Karla? Anótenlos.
- Al lanzar los dados, ¿algún punto cardinal tiene mayor probabilidad de salir? Argumenten.
- En este momento, ¿alguna de ellas tiene ventaja para ganar el juego? Expliquen.

b. Registren la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos:

- Evento A: que caiga Norte; P(A): ______
- Evento B: que caiga Sur; P(B): ______
- Evento C: que caiga Este; P(C): ______
- Evento D: que caiga Oeste; P(D): ______
- Evento E: que caiga dos veces seguida Norte; P(E): ______
- Al comparar las probabilidades de A, B, C y D, ¿cómo son entre sí? ______
- ¿Qué conclusión pueden registrar de lo anterior? ______

› Socialicen sus argumentos y registren sus acuerdos; después lean la siguiente información teórica:

Se dice que dos posibles sucesos de un experimento son **equiprobables** cuando la **probabilidad de ocurrencia de ambos es la misma**, es decir: **$P(A) = P(B)$**, por tanto, los eventos A y B son resultados equiprobables.

c. Analicen y determinen si los resultados del juego "De regreso a casa" son equiprobables. Argumenten su conjetura.

Karla le propuso a Brenda cambiar las reglas del juego: ahora, al lanzar el dado, si sale Oeste, avanzan dos casillas, una hacia ese punto cardinal y la otra en dirección de la casa.

- ¿Es justa para ambas jugadoras la propuesta de Karla? Argumenten. ______
- ¿Cómo podría modificarse la regla propuesta por Karla para que el juego sea justo para ambas jugadoras? Expliquen. ______

› Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En grupo discutan qué compensación o beneficio puede recibir un jugador que en un juego de azar tenga menor probabilidad de ganar. Expliquen y registren sus acuerdos.

© SANTILLANA

Juegos equiprobables y no equiprobables

3. **Reunidos en pareja, analicen la información y resuelvan las actividades.**

En primero de secundaria estudiaron que en los juegos de azar las posibilidades de ganar o perder están determinadas por la probabilidad de ocurrencia de los eventos favorables. En el siguiente recuadro se registraron algunos juegos de azar clásicos.

a. Analicen el evento citado en cada caso y determinen si las condiciones o reglas permiten que sean juegos de azar justos o de resultados equiprobables.

Rifa: ganar el premio al comprar tres boletos de 500 posibles.

Lotería instantánea o raspadito: ganar el premio si raspas consecutivamente tres figuras iguales.

Lanzar un dado: ganar si sale un número menor que 3.

Ruleta: ganar un premio al girarla.

Lotería mexicana: ganar en la primera jugada.

Volados: ganar si sale sol.

b. Para la rifa, determinen la probabilidad del evento "comprar tres boletos". ____________

- En este juego de azar, ¿influye que los números de los boletos comprados sean consecutivos? Expliquen. ____________
- Si los boletos fueran de numeración no consecutiva, ¿se tendrían mayores posibilidades de ganar? Argumenten. ____________
- En este juego, ¿la elección del boleto ganador resulta justa para todos? Justifiquen su respuesta. ____________

© SANTILLANA

c. Retomen el juego de la lotería instantánea. Respondan en su cuaderno.

- Si hay seis figuras en cada tarjeta, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres figuras iguales consecutivamente? Expliquen.
- ¿Qué es más probable: ganar o no ganar un premio? ¿Por qué?
- Sustenten por qué el juego del raspadito es o no justo.

d. En el caso del lanzamiento del dado, ¿cuál es la probabilidad de ganar con el evento que se indica?

- ¿Obtener 6, 5 o 3 son eventos equiprobables? Expliquen.
- Al lanzar un dado, en un evento A un jugador gana si cae 4, y en un evento B, otro jugador gana si cae número impar. ¿Estos eventos son equiprobables? ¿El juego resulta justo para ambos jugadores? Argumenten.
- Si en cada lanzamiento el ganador recibe 2 puntos, ¿cómo modificarían la premiación para que el juego fuera justo para ambos participantes?
- ¿Qué evento puede ser equiprobable al evento B?

e. Analicen la siguiente gráfica, que representa la probabilidad teórica de ganar al girar la ruleta.

- ¿Identifican eventos equiprobables? De ser así, indiquen cuáles.
- ¿Qué eventos no son equiprobables? Expliquen.
- ¿Los resultados de la ruleta son justos o equitativos? Expliquen.

f. Las siguientes imágenes muestran cuatro de las nueve tarjetas que forman un juego de lotería.

Jugador 1

Jugador 2

Jugador 3

Jugador 4

- ¿Qué jugadores tienen el mayor número de figuras comunes?
- ¿Este hecho influye en que tengan mayor o menor probabilidad de ganar? Expliquen.
- Al jugar una ronda de lotería, ¿qué jugador tiene ventaja de ganar? ¿Por qué?
- ¿En qué condiciones se puede hacer un juego que no sea justo? Expliquen.

› Socialicen sus argumentos y registren sus acuerdos en el cuaderno.

© SANTILLANA

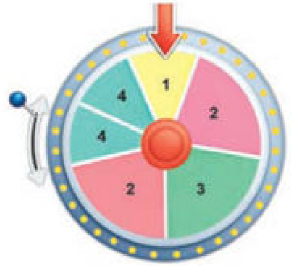
Juegos equitativos

4. Reunidos en equipo analicen la información y realicen lo que se pide.

Un juego de azar es justo o **equitativo**, cuando todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. En caso de que alguno tenga mayor probabilidad, el jugador con menor probabilidad debe tener una compensación u obtener mejor premio. Por ejemplo, dos jugadores, A y B, juegan a los dados. El jugador A gana un punto si al lanzar el dado sale cualquier número excepto 2; si resulta 2, el punto lo gana el jugador B. Para que el juego sea equitativo, el jugador B tiene que ganar 5 puntos, cada que salga el número 2.

a. Justifiquen por qué debe darse esa puntuación a cada jugador.

b. Cuatro alumnos juegan con las siguientes ruletas. A cada jugador le corresponde al azar un número y gana un punto, en cada ruleta, si al girarlas cae dicho número.



Ruleta 1

Ruleta 2

- ¿Qué número escogerían? ¿Por qué? ____________
- ¿En qué ruleta es más probable que caiga 1? Argumenten. ____________
- ¿Qué resultados son equiprobables en la ruleta 1? Expliquen. ____________
- ¿Cuáles son equiprobables en la ruleta 2? Justifiquen. ____________

c. Organícense en cuartetos y construyan las ruletas 1 y 2. Primero jueguen con la ruleta 1. Elijan al azar un número y registren los resultados en la tabla. Marquen con una ✓ la casilla del ganador.

Jugador	Número elegido	Giro 1	Giro 2	Giro 3	Giro 4	Giro 5	Veces que cayó
A							
B							
C							
D							

- ¿Quién ganó? ____________
- ¿Cuál es la probabilidad de que en la ruleta caiga 1? ____________
- Si se realiza otra vez el juego, ¿quién piensan que gane? Expliquen. ____________
- ¿Cómo modificarían la puntuación para que el juego resulte equitativo? ____________

© SANTILLANA

d. Jueguen con la ruleta 2 y registren los resultados en la siguiente tabla.

Jugador	Número elegido	Giro 1	Giro 2	Giro 3	Giro 4	Giro 5	Veces que cayó
A							
B							
C							
D							

- ¿Qué número tiene mayor probabilidad de salir en cada ruleta? ____________
- ¿Consideran que el juego de las ruletas es justo para todos los participantes? Expliquen. ____________
- ¿Cómo modificarían las condiciones para que sea un juego justo? ____________

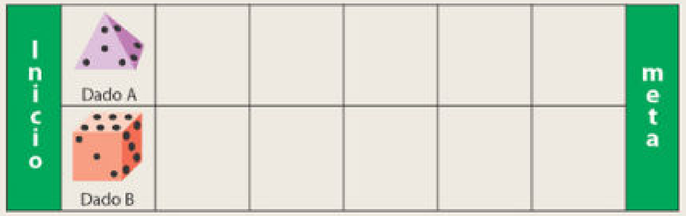
› Socialicen sus argumentos, valídenlos en grupo y registren sus conclusiones. Discutan las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo. Propongan ejemplos donde se tengan resultados equiprobables y no equiprobables.

Reto Justo o equitativo

1. Reunidos en pareja, realicen lo que se pide. Respondan en su cuaderno.

a. Elaboren un dado en forma de tetraedro y otro de cubo, con las caras numeradas del 1 al 4 y del 1 al 6, según corresponda.

- Diseñen un tablero como el que se muestra.
- Un jugador lanza el dado de seis caras y otro el tetraedro.
- Avanza una casilla quien saque 1; gana quien llegue primero a la meta.



b. ¿Se trata de un juego justo? Expliquen.

- Si se cambian las reglas y ahora avanza quien obtenga un número par, ¿el juego es justo? Argumenten.

c. Propongan una regla para que, en ambos casos, el juego sea equitativo.

2. Planteen un juego equitativo y otro que no lo sea.

› Discutan en grupo sus experiencias, anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio podrás ingresar al interactivo "Azar y determinismo". Realiza las actividades y comenta en clase tus observaciones.

https://dl.dropboxusercontent.com/u/44162055/manipulables/varios/barajabis.swf

Comparte tu experiencia en clase, si hay dudas, pide apoyo al profesor. (consulta: 29 de diciembre de 2016)

© SANTILLANA

Para saber más

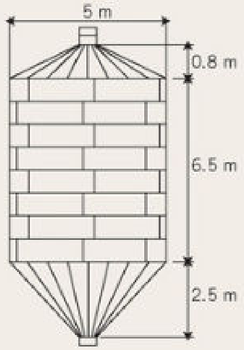
Contenedores para granos

1. **En pareja analicen y resuelvan el siguiente problema.**

Los silos son un instrumento muy útil en la agricultura para almacenar granos y semillas.

Los silos son contenedores de distintas formas y capacidades, que pueden ser abiertos o estar herméticamente cerrados, como los ejemplos que se muestran. Se utilizan para el almacenamiento o conservación de distintos productos, como granos, harinas, forraje o líquidos. El almacenamiento de granos en silos es una práctica muy frecuente. Todos tienen aberturas de alimentación, generalmente cerca del extremo superior, y bocas de descarga en la base o a un lado.

En la figura de la izquierda se tiene un silo típico que se utiliza para almacenar distintos granos.



a. A partir de las medidas que se muestran, calculen su volumen.

b. La capacidad está dada en m^3 pero se puede calcular el peso del grano si se conoce su densidad expresada en kg/m^3. Por ejemplo, en un metro cúbico se pueden almacenar entre 680 kg y 740 kg de maíz, entre 760 kg y 800 kg de frijol y de 640 kg a 680 kg de garbanzo.

- Estimen cuánto maíz puede contener el silo de la figura.
- ¿Cuánto frijol puede contener? ____________
- ¿Y cuántos kg de garbanzo? ____________

c. La tabla muestra las medidas de distintos silos. Complétenla para calcular las alturas de las tolvas o conos inferiores. Apliquen las razones trigonométricas, consideren que tienen un ángulo de inclinación de 30°.

Diámetro (m)	Altura cilindro (m)	Altura cono (m)		Capacidad cilindro (m^3)	Capacidad del cono (m^3)		Capacidad total (m^3)
		Techo	Tolva		Techo	Tolva	
4.5	5	1.1	1.3	79.53	5.83	6.89	92.25
	7.5	1.1					
	10	1.1					
7.25	5	1.7					
	7.5	1.7					
	10	1.7					
10	5	2.35					
	7.5	2.35					
	10	2.35					

© SANTILLANA

© SANTILLANA

d. Calculen en su cuaderno la cantidad de los siguientes granos que puede contener cada silo, según su capacidad por metro cúbico.

e. Propongan medidas de tres silos, para que cada uno pueda contener una tonelada de maíz, una de frijol y una de garbanzo, respectivamente.

- ¿Cómo obtuvieron los datos?

Grano	(kg/m^3)
Arroz	780-850
Garbanzo	640-680
Soya	700-760
Sorgo	680-740
Trigo	760-840

› Comparen sus resultados con los de otros compañeros y valídenlos con el maestro.

Otro tipo de contenedores

2. **Analicen y resuelvan el siguiente problema.**

En una fábrica de cartón producen cajas sin tapa para almacenar distintos productos.

a. La figura 1 es el desarrollo plano de una caja. Las líneas punteadas representan los dobleces que se hacen para formarla, como se muestra en la figura 2.

- ¿Qué expresión representa el largo de la base de la caja? ____________
- ¿Con qué expresión algebraica se puede representar el ancho y el largo de la caja? ____________

Figura 1

b. Escriban las expresiones algebraicas para calcular el volumen y el área de la caja sin tapa.

- V = ____________
- A = ____________

Figura 2

c. Si y mide 15 cm, z, 10 cm y x, 3 cm, ¿cuál es el área de la caja sin tapa? ¿Cuál es su volumen? ____________

- Expliquen en su cuaderno el procedimiento que siguieron para obtener los resultados.

d. Encuentren cuáles deben ser las medidas de la caja para obtener el máximo volumen, utilizando el mismo desarrollo plano, pero variando la medida del doblez.

e. Si se quiere conservar el volumen anterior, pero en una presentación más alargada, sin modificar el ancho, ¿cómo tienen que cambiar el largo y la altura de la caja? Propongan dos soluciones.

› Socialicen sus resultados y procediemientos con el grupo. Si existen dudas o diferencias, coméntenlas para llegar a acuerdos.

Evaluación tipo PISA

› Elige la opción con la respuesta correcta.

Raúl y Mónica están en un equipo de porristas. Cuando hacen pirámides, Mónica se para sobre los hombros de Raúl y juntos miden 290 cm, y su diferencia de estatura es de 16 cm. Considera que la medida de los hombros de Raúl a su cabeza es de 20 cm.

1. **¿Qué utilizarías para determinar las estaturas de Raúl y Mónica?**

   A) Una ecuación de la forma $ax + b = cx + d$ B) Una ecuación de la forma $ax = b$
   C) Un sistema de ecuaciones 2×2 D) Una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 = c$

2. **¿Cuál es la estatura de Raúl y la de Mónica? Ten en cuenta que Raúl es más alto que Mónica.**

   A) Raúl 1.58 m y Mónica 1.42 m B) Raúl 1.65 m y Mónica 1.49 m
   C) Raúl 1.68 m y Mónica 1.62 m D) Raúl 1.63 m y Mónica 1.47 m

3. **¿Cuál problema es posible resolver a través de una ecuación de segundo grado?**

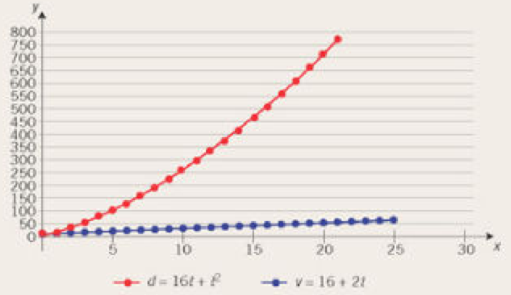
   A) Joaquín compró 3 pantalones y 3 camisas, por lo cual pagó $985.50. Si la diferencia entre un pantalón y una camisa es de $75.00, ¿cuál es el precio de un pantalón?, ¿y el de una camisa?
   B) La edad de Roberto es el doble que la de Ángeles más 5 años, si Roberto tiene 21 años, ¿cuál es la edad de Ángeles?
   C) Ramón y José pintaron una pared de 49 m². ¿Cuál es longitud de cada lado de la pared?
   D) Calcular el equivalente de 10.5 hectáreas a metros cuadrados.

4. **Un tren inicia su viaje a una velocidad de 16 m/s y a medida que avanza acelera a 2 m/s². Si se tienen las fórmulas: $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ y $v_f = v_0 + at$ que modelan cada situación del problema, ¿qué opción muestra el tipo de gráfi a de cada una?**

   A) $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, recta y $v_f = v_0 + at$, parábola B) $v_f = v_0 + at$, recta y $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, parábola
   C) $v_f = v_0 + at$, recta y $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, recta D) Ninguna de las anteriores

5. **Dadas las gráfi as, ¿qué tiempo transcurre si el tren avanza 720 metros? ¿En qué tiempo alcanza una velocidad fi al de 56 m/s?**

   A) 40 s y 20 s
   B) 20 min y 20 min
   C) 20 s y 20 s
   D) 20 s y 20 min



© SANTILLANA

© SANTILLANA

› Realiza lo que se indica en cada caso.

Una herramienta cónica de acero tiene un diámetro de $1\frac{1}{4}$ pulgadas y altura de 300 mm. La mitad de la altura de la herramienta es un cono y la otra mitad es un cilindro.

6. **Completa la tabla. Observa cómo varía el volumen de la pieza a medida que se modifica la altura de cada parte.**

Altura del cilindro (mm)	150	140	130	120	100	90	80	70	60
Volumen (cm³)									
Altura del cono (mm)	150	160	170	180	200	210	220	230	240
Volumen (cm³)									

   a. ¿Qué altura deben tener el cono y el cilindro para tener el mismo volumen? ____________

7. **Un grupo de geólogos está integrado por 83% de hombres; 17% de mujeres. La tercera parte de los hombres habla inglés, y el resto francés e italiano. De las mujeres, la mitad habla inglés y el resto francés e italiano. Al escoger un geólogo al azar...**

   a. ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre y hable dos idiomas? ____________
   b. ¿y de que sea mujer y hable inglés? ____________

8. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

Afirmaciones	Veracidad
Cuando se tiene una función cuadrática, como ax^2; si el coeficiente a es negativo, la curva se abre hacia abajo, pero si es positivo, la curva abre hacia arriba.	
El volumen de un cono es tres veces mayor que el volumen de un cilindro, bajo la condición de que la altura y base de ambos sean iguales.	

Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Utiliza los términos *siempre*, *a veces* o *poco*, y completa la tabla.

Indicadores			
Leo y represento, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.		Resuelvo y planteo problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.	
Resuelvo problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.		Resuelvo problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipo cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.	

En clase externa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.

Fuentes de información

Para el estudiante

Impresas

- J. Arce (2003). *El matemático del Rey*. España: Planeta.
- C. Andradas (2005). *Póngame un kilo de Matemáticas*. México: SM, El barco de Vapor. Saber núm. 4.
- L. Balbuena (2005). *Cuentos del cero*. España: Nivola.
- J. Burgos (1994). *Los relatos de Gudor Ben Jusá*. Madrid: Fundación General UPM.
- M. Campos (2002). *Andrés y el dragón matemático*. España: Laertes.
- J. Carlavilla (2003). *Historia de las Matemáticas en comics*. México: Proyecto Sur de Ediciones.
- J. Collantes y A. Pérez (2004). *Matecuentos Cuentamates*. España: Nivola.
- — (2003). *Matecuentos Cuentos con problemas 2*. España: Nivola.
- — (2005). *Matecuentos Cuentos con problemas 3*. España: Nivola.
- M. Enzensberger (1998). *El diablo de los números*. España: Siruela.
- C. Frabetti (2000). *Malditas Matemáticas: Alicia en el País de los Números*. Madrid: Alfaguara.
- — (1998). *El gran juego*. Madrid: Alfaguara.
- R. Gómez (2000). *La selva de los números*. Madrid: Alfaguara.
- D. Guedj (2000). *El teorema del loro*. Barcelona: Anagrama.
- — (2002). *El metro del mundo*. Barcelona: Anagrama.
- — (2002). *La medida del mundo*. México: Ediciones de Bolsillo.
- M. Guzmán (2007). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Nivola.
- M. Haddon (2004). *El curioso incidente del perro a medianoche*. Barcelona: Salamandra.
- T. Malba (1998). *El hombre que calculaba*. España: Catapulta Editores.
- I. Molina (2004). *El señor del cero*. Barcelona: Alfaguara.
- R. Moreno y J. Vegas (2002). *Una historia de las Matemáticas para jóvenes*. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento. España: Nivola.
- J. Millás y J. Forges (2006). *Números pares, impares e idiotas*. España: Alba Editorial.
- J. Muñoz (2008). *Ernesto el aprendiz de matemago*. España: Nivola.
- L. Norman (2002). *El país de las mates para novatos*. España: Nivola.
- — (2002). *El país de las mates para expertos*. España: Nivola.
- R. Rodríguez (2003). *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. Barcelona: Reverté.
- I. Roldan (2003). *Teatromático: divertimentos matemáticos teatrales*. España: Nivola.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Para el docente

Sentido numérico y pensamiento algebraico

- E. Filloy (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- E. Filloy (1995). "Didáctica del álgebra", en Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (4°: 1992, Ago 4-6: Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México). Editor: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.
- E. Filloy y T. Rojano (2007). "Sentido (lógico) numérico y resolución de problemas aritmético-algebraicos. Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico", en Encarnación Castro y José Lupiañez (Eds.). España: Universidad de Granada.

Forma, espacio y medida

- J. Salinas y E. Sánchez (2006). "Estudio exploratorio sobre el uso de herramientas culturales para la enseñanza de la demostración en la geometría euclidiana", en P. Bolea, M.J. González y M. Moreno (Eds.). Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 205-216.
- E. Sánchez y J. Salinas-Herrera (2007). "Identificación de propiedades y relaciones en un ambiente de geometría dinámica", en M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.). Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 343-353.
- G. Zubieta (1997). *Los indivisibles de Cavalieri: una perspectiva plausible para el aprendizaje del cálculo de volúmenes*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Educación Matemática Vol. 9, núm. 1, pp. 61-69.

Manejo de la información

- C. Batanero (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- C. Batanero y L. Serrano (1995). *La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas*. UNO, Revista de didáctica de las matemáticas, 5, pp. 15-28.
- C. Batanero (1998). *Pensamiento aleatorio*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- Juan Díaz Godino (1991). *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. España: Editorial Síntesis.

Biblioteca de Aula y biblioteca normalista

- Gardner, Howard (1997). *La mente no escolarizada*. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas, Buenos Aires: Biblioteca del Normalista.
- Hargreaves, Andy, Lorna Earl y Jim Ryan (2000). *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*, Buenos Aires: Biblioteca del Normalista.
- Régules Ruiz-Funes, Sergio de y Concepción Ruiz Ruiz-Funes (2003). *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, Primero: Biblioteca de Aula

Electrónicas

- www.sinewton.org/numeros/
  Página " Revista de Didáctica de las Matemáticas" NÚMEROS, es una publicación que incluye trabajos, principalmente, para los profesores de educación primaria y secundaria. El acceso es gratuito y está editada por la Sociedad Canaria de profesores de Matemáticas: "Isaac Newton"
- http://www.telesecundaria.sep.gob.mx
  En la página se pueden encontrar recursos audiovisuales, interactivos, applets y otros para trabajar contenidos matemáticos.
- ntic.educacion.es/v5/web/profesores/secundaria/matematicas/
  En la página del "Ministerio de Educación, España", encontrará información, recursos y actividades referentes a temas de educación matemática.
- www.sep.gob.mx/swb/sep1/sep1_Bibliotecas#.UoU-vlmLJhp
  En esta página encontrará bibliotecas virtuales sugeridas por la SEP, en las que podrá consultar materiales educativos y artículos especializados.

Consultadas: 29 de diciembre de 2016, 13:30 h.

Consultadas

- Airasian, Peter (2002). *La evaluación en el salón de clases,* México: Biblioteca de actualización del maestro.
- Brusseau, Guy (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Traducción (1993). Córdoba, España: Edición IMAF.
- Carretero, Mario (1993). *Constructivismo y educación,* Madrid: Edelvives.
- Coll, César (1999). "Los profesores y la concepción constructivista" en César Coll, Teresa Mauri, Mariana Miras, Javier Onrubia, Isabel Solé y Antoni Zabala. *El constructivismo en el aula.* Barcelona: Editorial Graó, de Serveis Pedagògics.
- —(2003). "Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo", en Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. México: Editorial Paidós Mexicana.
- Giordan, André y Gérard de Vecchi (1997). *Los orígenes del saber: de las concepciones personales a los conceptos científicos,* Sevilla: Díada Editora. (colección: Investigación y enseñanza. Serie Fundamentos, núm. 1).
- Porlán, Rafael (1997). *Constructivismo y Escuela. Hacia un modelo de enseñanza basado en la investigación,* Sevilla: Díada Editora (colección: Investigación y enseñanza. Serie Fundamentos, núm. 4)
- Rigo, Mirela (2009). "La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

© SANTILLANA

Matemáticas 3

TODOS JUNTOS

Matemáticas 3 orienta los procesos de construcción de significados matemáticos con base en las características cognitivas, orgánicas y afectivas de los alumnos. En su diseño, considera la propuesta metodológica de la construcción social del aprendizaje. Así, los estudiantes podrán no solo acceder al conocimiento matemático, sino también desarrollar las competencias necesarias para enfrentar los retos de la sociedad. Por ello, el libro recomienda enlaces, *applets* y aplicaciones de la geometría dinámica; estas experiencias en ambientes virtuales desarrollarán las competencias digitales de los alumnos.

SANTILLANA
Secundaria

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

ISBN 978-607-01-2252-1

9 786070 122521

santillana.com.mx